

## Szemantikai értékrés Cantor mennyországának égboltján – avagy mi az, amit megmentett Hilbert?

Geier János  
janos@geier.hu

Stereo Vision LTD, Budapest

Közismert, hogy a halmazelmélet axiomatizálásának vezéralakja Hilbert volt. Ruzsa [1, p176] szerint „Hilbert semmiképen sem akart lemondani Cantor transzfinít matematikájáról. . .” Másutt Ruzsa [1, p183]: „A halmazelmélet axiomatizálásának természetes célja, hogy az antinómiák kiküszöbölése mellett a naiv halmazelmélet értékes részéből minél többet megmentsen.” Nyilvánvaló, hogy az „értékes rész” magja nem más, mint a Cantor-féle átlós eljárás és az azon alapuló hatványhalmaz-tétel (*CHT*). Megmenteni csak azt lehet, ami előtte már létezett, így jogosan vethető fel a kérdés: az ún. „naiv halmazelmélet” keretein belül – azaz a 19. sz. végére kialakult (és napjaink „hétköznapi matematikusai” által is rendszeresen használt) tiszta, világos, természetes matematikai gondolkodásmód (*TMG*) szerint – hibátlan-e a *CHT* bizonyítása? Itt arra a gondolatmenetre utalok, amit minden, e témával foglalkozó tankönyvben megtalálhatunk; például Ruzsa [1, p147].

Előadásomban virtuális időutazásra invitálok az 1890-es évekbe, amikor megjelentek a halmazelméleti antinómiák éppen a nevezett gondolatmenet parafrázisaiként, és még nem volt se *ZFC*, se *NBG*, de volt egy egységes konszenzus a *TMG*-ről. Ennek fényében kimutatni szándékozom: a *CHT* bizonyításának tankönyvi, „naiv” gondolatmenete hibás, mert az indirekt levezetésnek egy adott pontján nem veszi figyelembe az ott fellépő szemantikai értékrést. A hiba kimutatásának alapja szintén megtalálható Ruzsa [1, p178]-ban, amikor arról beszél, hogy „. . . bizonyos dolgok között egy kétváltozós  $F(a, b)$  reláció van adva oly módon, hogy . . . minden  $d$ -re  $F(d, d)$  és  $F(d, s)$  közül pontosan az egyik teljesül, és . . . ez a speciális  $s$  elem is a számításba jöhető dolgok közé tartozik.” Ugyanakkor elfogadom, hogy a *CHT* a *ZFC*-nek tétele.

Következmények:

- (1) Hilbert nem mentett meg semmit, ellenben (tévedésből?, Zermeloval, Frankellel és másokkal együtt) „. . . egy új, más világot teremtett”.
- (2) A „Russell-antinómia” nem antinómia.

## Hivatkozások

- [1 ] Ruzsa Imre (1966) *A matematika néhány filozófiai problémájáról*. In: *Világnézeti nevelésünk természettudományos alapjai IV.*, Tankönyvkiadó, Budapest.