Logikai és nyelvfilozófiai problémák

a *Logikai-filozófiai értekezés*ben

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a ...filozófia... tudományágban

Írta: ...Mekis Péter... okleveles ...filozófus...

Készült a Debreceni Egyetem ...Interdiszciplináris Társadalom- és Bölcsészettudományi .. doktori iskolája
(...Modern filozófia... programja) keretében

Programvezető: ...Novákné dr. Rózsa Erzsébet...

Témavezető: Dr. . . . .
(Dr. Vajda Mihály)

A doktori szigorlati bizottság:
elnök: Dr. …………………………
tagok: Dr. …………………………
Dr. …………………………

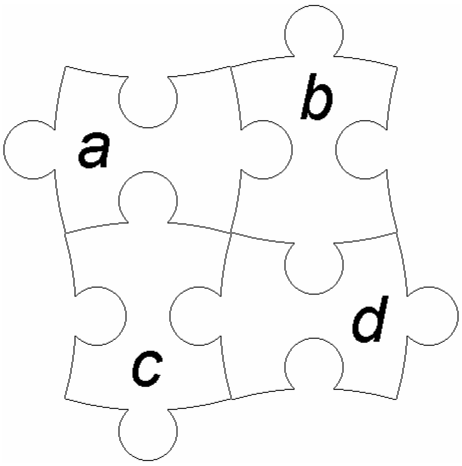
A doktori szigorlat időpontja: 200… . ……………… … .

Az értekezés bírálói:
Dr. ....
Dr. ……………………………
Dr. ....

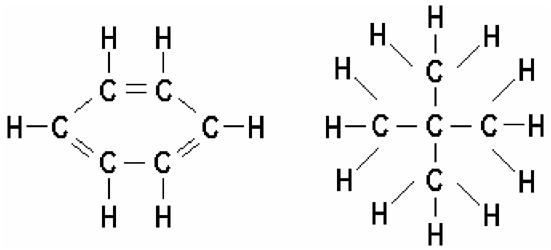
A bírálóbizottság:
elnök: Dr. ....
tagok: Dr. …………………………..
Dr. …………………………..
Dr. …………………………..
Dr. …………………………..

A nyilvános vita időpontja: 200… . ……………… … .

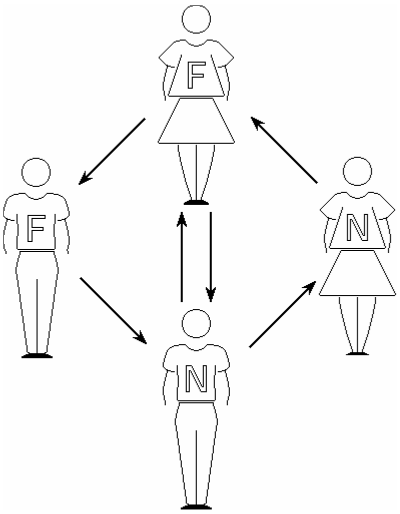
Ábrák a *Tractatusi megoldások a színkizárási problémára* c. fejezethez



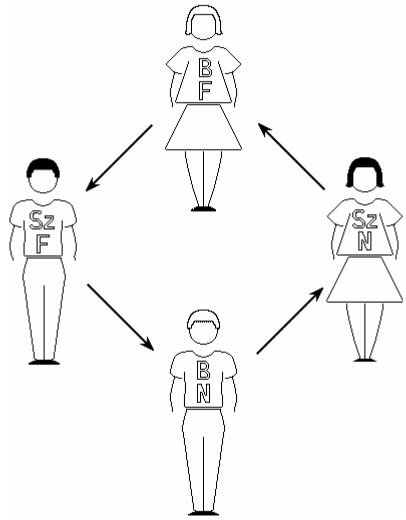
1. ábra: Az 1. modellben az összefüggések nem függetlenek.



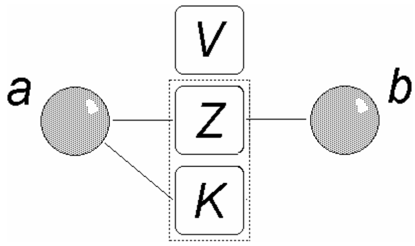
2. ábra: Két szénhidrogén-molekula szerkezete.



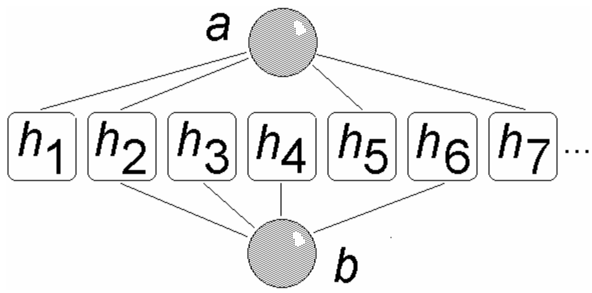
3. ábra Férfiak és nők társasága. Egyesek a férfiak (F) felé orientálódnak, mások a nők (N) felé. A lehetséges vonzalmakat nyilak jelzik.



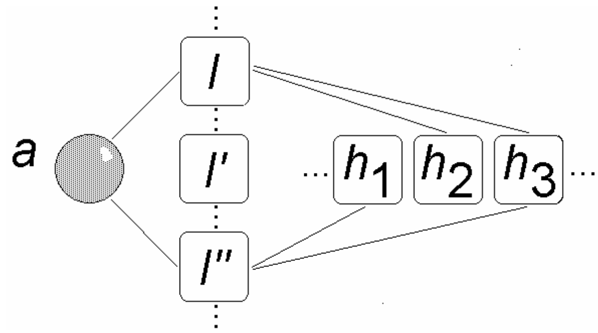
4. ábra Lehetséges vonzódások az 5. modellben. Egyesek a szőkékhez (Sz), mások a barnákhoz (B) vonzódnak.



5. ábra *a* cián, *b* zöld színű.



6. ábra Az *a* tárgy színének hullámhossza 0,1100101… (a vörös egy árnyalata), a *b* tárgyé 0,0111010… (a zöld egy árnyalata).



7. ábra *a* színében az *l* és az *l''* hullámhosszú komponens intenzitása eltér. *l'* nem komponense *a* színének.

Logikai és nyelvfilozófiai problémák a *Logikai-filozófiai értekezés*ben

PhD értekezés

Mekis Péter

Témavezető: Vajda Mihály akadémikus
DE BTK Modern Filozófia doktori program

2008

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

6 Az igazságfüggvény általános formája: $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$.

7 Amiről nem lehet beszélni, arról hallgatni kell.

A második mondat nemcsak hangzatosabb, de fontosabb is, mint az első. Az első nélkül mégsem több keresztrejtvénybölcsességnél. Aki a nyelv és a logika tractatusi elméletét kidolgozó szövegrészek figyelembe vétele nélkül olvassa a *Tractatus* utolsó bekezdéseit, azt gondolhatja, hogy a kimondhatatlan körébe csupa vonzó vulgárfilozófiai téma tartozik: a halál, a világ *sub specie aeterni* szemlélete és az élet értelme. A megelőző bekezdések azonban jelentősen árnyalják a képet: mindenekelőtt a logika, a szemantika és a matematika az, ami kimondhatatlan.

Szerintem nem érdemes a *Tractatus*ról anélkül írni, hogy szem előtt tartanánk a szöveg etikai konklúzióját. Ez az, ami többé teszi a nyelvfilozófia és a logika történetének egy érdekes, de menthetetlenül elavult darabjánál. Viszont úgy vélem, hogy ez az etikai mondandó nem közvetlenül hozzáférhető; mindenekelőtt végig kell küzdeni magunkat a nyelv és a logika természetéről szóló, olykor reménytelenül skolasztikus, máskor reménytelenül technikai fejtegetéseken.

Dolgozatom néhány olyan szövegből nőtte ki magát, amelyet évekkel ezelőtt csupán előtanulmánynak szántam a korai wittgensteini filozófia egészének mélyebb megértéséhez. Bár ezt a szándékot nem adtam fel, érdeklődésem idővel más témákra terelődött. Amikor aztán nekifogtam a jelen dolgozat megírásának, be kellett látnom, hogy egyrészt a korábban átgondoltnak és meggyőzőnek vélt érveim jelentős átdolgozásra szorulnak; másrészt pedig sem az időbeli, sem a terjedelmi korlátok nem teszik már lehetővé a tractatusi etika tárgyalását. Úgyhogy a jelen dolgozatot továbbra is csak előtanulmánynak szánom.

A logika és a szemantika problémái iránt nem fogékony olvasónak mindenekelőtt a színkizárásról szóló 2 fejezetet szeretném figyelmébe ajánlani. Ez az egyetlen korábbi szövegem, amelyet változtatás nélkül átemeltem ebbe a dolgozatba. Nem mintha hibátlannak tartanám; viszont úgy gondolom, hogy érdekes gondolati játékot visz végig, és noha lazán kapcsolódik a későbbi fejezetekhez, talán jó felvezetésnek bizonyulhat.

Ha esetleg akadna a szövegnek a technikai kérdések iránt fogékony, de a filozófia iránt nem érdeklődő olvasója, annak mindenekelőtt a 4.10. szakaszban bevezetett minimális halmazelméletet ajánlanám figyelmébe; valamint a 3.4. szakaszban tárgyalt kváziparadoxont.

*

Az értekezés magját a wittgensteini logikai szimbolika 4. fejezetben kidolgozott formális rekonstrukciója képezi; nem árt tehát elöljáróban néhány szót szólni arról, hogy milyen szerepet tölt be szerintem a formális rekonstrukció egy filozófiai szöveg interpretációjában. Mindenekelőtt: a formális eszközök nagy segítséget jelenthetnek a fogalmak és az érvek közötti eligazodásban; különösen egy olyan mű esetében, mint a *Tractatus*, amely nem kimondottan értekező prózában íródott, és így fogalmaira és érveire csak következtetni lehet. Ugyanakkor a formális rekonstrukciónak nem lehet feladata, hogy rövidre zárjon interpretációs kérdéseket. Meggyőződésem, hogy a filozófia történetében jelentősnek bizonyult művek sokszor éppen sokértelműségüknek köszönhetik maradandó jelentőségüket; annak, hogy gazdag nyersanyagot kínálnak a filozófiai interpretáció munkája számára. Ha ezt a gazdagságot logikai eszközökkel megnyirbáljuk, a filozófiai jelentőséget éri veszteség.

Úgy vélem, a formális rekonstrukció és a nem-formális eszközökkel történő interpretáció ideális esetben egymást segíti. A formális rekonstrukció körvonalait előzetes interpretációs munka határozza meg; de a rekonstrukció vissza is hat az interpretációra. Ennek néhány lehetséges módja:

1. kiderülhet, hogy plauzibilisnek vélt interpretációs döntések vállalhatatlan következményekkel járnak;

2. a rekonstrukció felmutathat olyan értelmezési lehetőségeket, amelyekkel előzetesen nem vetettünk számot;

3. kiderülhet, hogy lényegesen különbözőnek vélt interpretációs lehetőségek ugyanolyan logikai következményekkel járnak;

4. kiderülhet, hogy egymáshoz közelinek vélt interpretációs lehetőségek lényegesen különböző logikai következményekkel járnak.

A felsorolást még hosszan lehetne folytatni. Az esetekben közös, hogy a formális eszközök alkalmazásával nem lezárul, hanem új irányokat vesz az interpretáció. Ez másfelől azért is kívánatos, mert a formális logikai eszköztár alkalmazása óhatatlanul nagyon erős külső előfeltevéseket erőltet rá az értelmezett műre. E feltevések értelemtorzító hatásától csak a további interpretációs munka szabadíthat meg. Amelyet esetleg újabb rekonstrukció követhet; amely viszont újabb interpretációs munkát kényszerít ki. És így tovább; ideális esetben a végtelenségig. Ennek fényében már nem olyan elkeserítő, ha kitűzött feladatomnak csak töredékét sikerült teljesítenem.

*

Szeretném megköszönni a türelmét és támogatását mindazoknak, akik nem hagyták, hogy lemondjak a dolgozat megírásáról. Mindenekelőtt a tanszékvezetőmnek, Máté Andrásnak, valamint a feleségemnek, Fekete Bernadettnek tartozom hálával.

2. fejezet

Tractatusi megoldások a színkizárási problémára

2.1. Bevezetés

P. M. S. Hacker sommás megállapítása szerint a *Tractatus* filozófiai kísérlete voltaképpen egy apróságon bukott meg: „Ahogy egy nagy tudományos elméletet speciális körülmények között egyetlen döntő jelentőségű adat is megerősíthet vagy cáfolhat (ez történt például a relativitás-elmélet és a Merkúr perihéliumának precessziója esetében), úgy Wittgenstein első filozófiája is azért omlott össze, mert képtelen volt megoldani egyetlen problémát: a színkizárást."[1] Bármilyen naftalinszagúak is ma már a popperi fogalmak, Hacker harminc éves értékelése máig érvényes szakirodalmi konszenzust tükröz.[2] Hasonló álláspontot fogalmazott meg már E. B. Allaire is 1959-es cikkében: „Wittgenstein nem tágított attól, hogy kitüntetett szerepet tulajdonítson az [»ez vörös és ez zöld«]-höz hasonló kijelentéseknek; ez volt az egyik legfőbb indítéka arra, hogy feladja a *Tractatus*t."[3]

Ez az értékelés igazolást talál a *Tractatus* utáni Wittgenstein önkritikájában is. A *Néhány megjegyzés a logikai formáról* című, egy szűk évtizeddel a *Tractatus* után írt rövid tanulmány elsősorban éppen e kérdés kapcsán szokott szóba kerülni. Wittgenstein itt a következőképpen fogalmaz: „Fenntartom, hogy az a kijelentés, amely fokozatot rendel egy minőséghez, nem elemezhető tovább; mi több, a fokozati különbségek viszonya a különböző fokozatokat tulajdonító kijelentések közötti belső viszony. Az atomi kijelen-

[1] Hacker [1972], 86.o.

[2] Egyetértőleg idézi például Austin [1986], 207.o.

[3] Allaire [1966]. 189.o.

tésnek tehát ugyanazzal a számossággal kell rendelkeznie, mint a fokozatnak, amelyet tárgyának tulajdonít; amiből az következik, hogy számoknak kell megjelenni az atomi kijelentések formáiban. Az, hogy a fokozatokról szóló elemezhetetlen kijelentések kizárják egymást, ellentmond annak a néhány éve általam közzétett nézetnek, amely szerint az atomi kijelentések nem zárhatják ki egymást."[4] Noha az idézetben nem esik szó színekről, világos, hogy az abban tárgyalt fokozatokra a színárnyalatok nyújtják az egyik legkézenfekvőbb példát. Hogy világosan lássuk Wittgenstein önértékelésének tétjét, érdemes röviden összefoglalni, miben is áll a színkizárási probléma.

A *Tractatus* ominózus bekezdése szerint lehetetlen, „hogy két szín egyszerre a látótér egyazon pontján legyen; éspedig logikailag lehetetlen, mert ezt a szín logikai szerkezete zárja ki. [...] (Világos, hogy két elemi kijelentés logikai szorzata nem lehet sem tautológia, sem ellentmondás. Az az állítás, hogy a látótér egy pontja egyazon időben két különböző színnel bír, ellentmondás.)" (6.3751) Az idézett bekezdésnek természetesen fontos előfeltevése, hogy az 'a s színű' formájú színkijelentések – ahol s egy színt jelöl, a pedig valamit, aminek színt lehet tulajdonítani – nem pusztán látszatkijelentések. Ha azok volnának, akkor a köznyelv nem csupán álruhába öltöztetné a gondolatokat (4.002), de egyenesen alkalmatlan eszköz volna azok közlésére, lévén hogy értelmesnek vélt és nap mint nap használt ténykijelentéseink jelentős része értelmetlen. [5] Ha viszont elfogadjuk a színkijelentések értelmes voltát, két lehetőségünk marad: e kijelentések lehetnek elemiek vagy összetettek. A szakirodalmi konszenzus szerint mindkét választás végzetes a tractatusi rendszer tarthatóságára nézve.

A *Tractatus* szerint „[c]sak logikai szükségszerűség van" (6.37). E tézisnek a következménye, hogy ha két kijelentés ellentmond egymásnak, akkor ennek logikai elemzésükben meg kell mutatkoznia. Ebből adódóan pedig: ha két kijelentés elemi, tehát logikailag tovább nem elemezhető, akkor nem mondhatnak ellent egymásnak. Mindebből következik, hogy az 'a s_1 színű' és az 'a s_2 színű' kijelentések nem lehetnek elemiek, hiszen ellentmondanak egymásnak.

Maradna tehát a második lehetőség: a színkijelentések és más fokozati kijelentések összetettek. Ezzel a lehetőséggel szemben azonban a *Néhány megjegyzés...* felhoz egy igen tetszetős érvet: „Mert legyen, mondjuk, a fényesség egysége b, $E(b)$ pedig az az állítás, amely szerint az E entitás rendelkezik ezzel a fényességgel. Így az $E(2b)$ kije-

[4] *Néhány megjegyzés...* 67.o. A fordításon módosítottam.

[5] Wittgenstein nem riadt vissza attól, hogy széles körben használt kijelentéseket látszatkijelentésekké minősítsen. Erre talán az azonosságok szolgálnak a legjobb példával: 'két kavics meg két kavics az négy kavics'; vagy 'az etika és az esztétika egy'. Az utóbbi persze más szempontból is problematikus.

lentésnek, amely azt mondja, hogy E két fokozatnyi fényességgel rendelkezik, elemezhetőnek kellene lennie $E(b)$ és $E(b)$ logikai szorzataként, ami azonban egyenlő $E(b)$-vel. Más részről ha megpróbálunk különbséget tenni az egységek között és következetesen $E(2b) = E(b') \wedge E(b'')$-t írunk, akkor a fényesség két különböző egységét vesszük fel, és így ha valamely entitás egy egységgel rendelkezik, felmerülhet a kérdés, hogy vajon melyikkel (b'-vel vagy b''-vel) a kettő közül – ami nyilvánvalóan képtelenség."[6] Az érv természetesen nehézség nélkül átfogalmazható lenne úgy, hogy fényességbeli fokozatok helyett a színskála fokozatairól szóljon.

Nagyjából ezeken a megfontolásokon alapul a fentebb idézett szakirodalmi konszenzus, amellyel szemben a jelen dolgozat állást foglal. Kétségkívül igaza van ugyan Allaire-nek abban, hogy a színkizárási probléma Wittgenstein fő motivációi közé tartozott a tractatusi rendszer elvetésében; ugyanakkor ez nem jelenti azt, hogy a probléma valóban megoldhatatlan volna a *Tractatus* kontextusában, vagy hogy a *Néhány megjegyzés...* önkritikája perdöntő lenne. A következőkben néhány olyan modellt szerkesztünk a tractatusi ontológiához, amelyekben szerepelnek fokozatok, és ennek ellenére megfelelnek az elemi kijelentések függetlenségével kapcsolatos követelménynek. Ezek a modellek tehát a színkizárási probléma tractatusi megoldásai. Mindenekelőtt azonban lássuk az elméletet, amelyhez a modelleket szerkesztjük.

2.2. A tractatusi ontológia

A *Tractatus* hírhedten kevés eligazítást ad arról, hogy mik is azok a tárgyak, amelyek a világ szubsztanciáját alkotnák. Annyit tudunk meg róluk, hogy semmiképpen sem azonosíthatók a mindennapi életben bennünket körülvevő vagy a természettudományok által vizsgált dolgokkal, lévén az utóbbiak összetettek. Ugyanígy nem kapunk példát az összefüggésekre[7] sem, amelyek a tractatusi tárgyak elemi konfigurációi lennének, s amelyek fennállása és fenn nem állása konstituálná a tractatusi valóságot. Ennek a hiánynak elvi okai vannak. Ha ugyanis bármilyen jellemzést tudnánk adni a tárgyakról azon túl, hogy megadjuk a logikai formájukat – tehát tisztázzuk, hogy milyen elemi konfiguráci-

[6] Uo. Wittgenstein gyakorlatilag megismétli Fregének az additív egységgel kapcsolatos érvét *Az aritmetika alapjai*ból. Frege találó megfogalmazása szerint a kortársai által használt $1'$, $1''$, $1'''$ jelek „beszédes kifejezései a zavarnak: szükségünk van az egyenlőségre, ezért van az 1; szükségünk van a különbözőségre, ezért vannak az indexek, amelyek sajnos csak annyit számítanak, hogy megszűntetik az egyenlőséget". (36. §.)

[7] A *Sachverhalt* terminus fordításáról ld. a *Tractatus* magyar kiadásának kontrollfordítói utószavát: 108sk.o.

ókban fordulhatnak elő –, ez azt jelentené, hogy rendelkezünk olyan ismerettel, amely nem a valóságról alkotott kép, s így kívül esik a nyelvi kifejezhetőség tractatusi normáin. Másként szólva: ki tudnánk mondani valami kimondhatatlant. Ebben a tekintetben különösen tanulságos az azonos logikai formával bíró tárgyak esete: a *Tractatus* szerint két ilyen tárgy „csak abban különbözik egymástól, hogy különbözőek" (2.0233). Az azonos logikai formával rendelkező tárgyak tehát egyrészt megkülönböztethetetlenek, másrészt viszont ez nem ad alapot arra, hogy azonosnak tekintsük őket.[8] Logikai formájukon túl tehát semmit sem ismerhetünk meg a tárgyakból; eszerint viszont szemléletes jellemzésük sem informatív, sem értelmes nem lehet.

Az értelmetlenség kockázata persze önmagában még nem akadályozta meg Wittgensteint abban, hogy állást foglaljon valamely kérdésben. Az az állítás, hogy „[a] világ a tények és nem a dolgok összessége" (1.1) semmivel sem értelmesebb, mint ha azt mondanánk, hogy mondjuk fizikai részecskék vagy érzet-adatok alkotják a világ szubsztanciáját. A kétfajta állítás között azonban fontos különbségek vannak. Az előbbi a világ megismerhetőségének és az ismeretek nyelvi kifejezhetőségének tractatusi vizsgálatát vezeti be – s túlzás nélkül állíthatjuk, hogy a *Tractatus* összes fontosabb tézisével összefügg. A tárgyak mibenlétével kapcsolatos döntés azonban semmilyen összefüggést nem mutat a *Tractatus* kulcskérdéseivel. Vagy egy másik irányból közelítve a dologhoz: az, hogy a világ tények vagy dolgok összessége, bármennyire nem akként van is megfogalmazva, transzcendentális kérdés a tractatusi kontextusban; az viszont, hogy fizikai, fenomenális vagy bármilyen más értelemben vett tárgyak alkotják a világ szubsztanciáját, transzcendens kérdés. Amennyiben elfogadjuk, hogy a wittgensteini vizsgálódások alapvetően transzcendentális természetűek – emellett e helyütt nincs lehetőségünk részletesen érvelni –, akkor az is világos, hogy míg az egyik esetben az értelmetlenség busásan megtérül, a másikban semmi tényleges haszna nincs.

Ennek ellenére úgy vélem, hogy egyáltalán nem haszontalan szemléletes modelleket szerkesztenünk a tractatusi ontológiához. Az ilyen vizsgálatok több szempontból is hasznosak lehetnek. Egyrészt szemléletességük révén a modellek átláthatóbbá teszik az elméleten belüli fogalmi viszonyokat, és így segítik azok megértését, továbbá olyan prob-

[8] Természetesen az azonos logikai formájú tárgyak között is különbséget tudunk tenni külső tulajdonságaik alapján, de ez a különbség a világot és nem a tárgyat jellemzi. Legyen a t_1 és t_2 tárgyak logikai formája azonos, és legyen $s(t_1)$ egyike azoknak az összefüggéseknek, amelyekben t_1 szerepet játszik. Ekkor $s(t_2)$ is egyike a logikai teret kifeszítő összefüggéseknek, és mivel az összefüggések függetlenek egymástól, megeshet, hogy míg $s(t_1)$ fennáll, $s(t_2)$ nem áll fenn. Ennek alapján t_1 és t_2 megkülönböztethető, de ez a különbség esetleges; a viszonyok megfordulhatnak, miközben t_1 és t_2 változatlan marad.

lémákat mutathatnak meg, amelyek az eredeti kontextusban észrevétlenek maradnának. Másrészt, ahogy az formalizált deduktív elméletek esetében is történik, egy modell szerkesztése valamely elmélethez *ipso facto* bizonyítja az elmélet konzisztenciáját; több, egymástól eltérő szerkezetű modell pedig *ipso facto* bizonyítja, hogy az elmélet nem kategorikus, vagyis a valóság nem csak egyféleképpen felelhet meg neki.

Ahhoz, hogy modellt tudjunk szerkeszteni, mindenekelőtt elméletre van szükségünk. Hat alapvető tézist fogunk megfogalmazni, amelyek együttesen alkotják a **TO** elméletet, a tractatusi ontológia vizsgálódásaink szempontjából releváns szeletét. Az elmélet megfogalmazása után olyan szemléletes konstrukciókat keresünk, amelyek kielégítik a téziseket. Lemondunk arról, hogy formalizált elméletként rekonstruáljuk a tractatusi ontológiát; ugyanígy lemondunk arról is, hogy modelljeinket halmazelméleti eszközökkel konstruáljuk. Több szempont is szól a formalizálás ellen. Egyrészt a természetes nyelvben megfogalmazott tézisek formalizálása során számos technikai nehézség lépne fel, amelyek megoldása igen messzire vezet a színkizárási problémától. Másrészt a formalizáláshoz olyan interpretatív döntéseket kellene hoznunk, amelyeket csak a szemléletes modellek megszerkesztésében szeretnénk meghozni. Ha azt szeretnénk, hogy a különböző modelljeink egyáltalán ugyanannak az elméletnek a modelljei legyenek, akkor minden egyes tézis formalizálása során az összes interpretációs alternatívára tekintettel kellene lennünk; ez még még tovább bonyolítaná a – még egyszer hangsúlyozzuk, elvileg megoldható – feladatot.

A tractatusi ontológia központi fogalmai: tárgy (*Gegenstand*), összefüggés (*Sachverhalt*), tény (*Tatsache*), fennállás (*Bestehen*), világ (*Welt*), forma (*Form*); valamint logikai tér (*logische Raum*), valóság (*Wirklichkeit*), helyzet (*Sachlage*). Az egyszerűség kedvéért **TO**-ban csak az első hatot szerepeltetjük. Az utóbbi három terminus mindegyikének értelmezése – csakúgy, mint bármelyik másik tractatusi fogalomé – parttalan szakirodalmi viták tárgya; annyi azonban bizonyos, hogy definiálhatók az előzőek segítségével. A hat fogalom közötti viszonyokat az alábbi axiómák rögzítik:

TO1 A világ a tények összessége. (1.1)

TO2 A tény összefüggések fennállása. (2)

TO3 Az összefüggést tárgyak konfigurációja alkotja. (2.0272)

TO4 A tárgy formája nem más, mint összefüggésekben való előfordulásának lehetősége. (2.0141)

TO5 Az összefüggések függetlenek egymástól. (2.061)

Az összefüggések függetlenségén azt értjük, hogy az összefüggések fennállásának és fenn nem állásának egyetlen kombinációja sem vonja maga után bármely, a kombinációban nem szereplő összefüggés fennállását vagy fenn nem állását. Ez az értelmezés kézenfekvő ugyan, de jóval erősebb, mint amit a 2.062-ben találunk; ez utóbbi ugyanis csak annyit követel meg, hogy az összefüggések páronként függetlenek legyenek. Számos szempont szól az erősebb értelmezés mellett; mindenekelőtt az elemi kijelentések igazságlehetőségeinek kombinatorikus felfogása (4.27).

TO5-nek van két igen fontos következménye. Az első az, hogy az összefüggések elemiek; ha ugyanis egy összefüggésnek volna olyan komponense, amely maga is összefüggés, akkor a kettő nem volna független egymástól. (Ennek a megfordítása természetesen nem igaz; a *Néhány megjegyzés...* éppen azt az álláspontot képviseli, hogy az összefüggések elemiek, de még csak páronként sem függetlenek.) **TO5** másik következménye az, amit a *Tractatus* a tárgyak szilárdságának nevez: az, hogy mely összefüggések állnak vagy nem állnak fenn, nem befolyásolja a tárgyak formáját. Vagy másként fogalmazva: a tárgyak külső tulajdonságai függenek belső tulajdonságaiktól, de belső tulajdonságaik nem függenek a külsőktől.

A színkizárási probléma tárgyaláshoz **TO**-t egy további axiómával kell kiegészítenünk, amely biztosítja, hogy a probléma egyáltalán felvetődjön. Az újabb axióma azt a feltevést fogalmazza meg, hogy vannak olyan tények, amelyeket színkijelentések képeznek le – ezeket akár szín-tényeknek is nevezhetjük. Az axióma pontos megfogalmazását azonban megnehezíti, hogy a színkizárási probléma egyik tétje éppen a színkijelentések logikai formája. A *Tractatus* hat helyen tesz említést a színekről. Ezek külön-külön is meglehetősen tág teret adnak az értelmezésnek, és több, egymásnak részben ellentmondó választ sugallnak arra a kérdésre, hogy mi is a színek és a színnel rendelkező entitások ontológiai státusa a *Tractatus*ban:

Sz1 „A látómezőben levő foltnak nem kell ugyan vörösnek lennie, de valamilyen színnel rendelkeznie kell: úgyszólván körülveszi a szín-tér. A hangnak rendelkeznie kell valamilyen magassággal, a tapintóérzék tárgyának valamilyen keménységgel stb.” (2.0131)

Sz2 „Hozzávetőlegesen mondva: a tárgyak színtelenek.” (2.0232)

Sz3 „Tér, idő és szín (színesség) a tárgyak formái.” (2.0251)

Sz4 „A kép minden olyan valóságot leképezhet, amelynek a formájával rendelkezik. A térbeli kép minden térbelit, a színes minden színeset, és így tovább.” (2.171)

Sz5 „Ez a kék szín és ez a másik *eo ipso* a világosabb és a sötétebb belső viszonyában állnak. Elgondolhatatlan, hogy ez a két tárgy ne álljon ebben a viszonyban egymással." (4.123)

Sz6 „Lehetetlen például, hogy két szín egyszerre a látótér egyazon pontján legyen; éspedig logikailag lehetetlen, mert ezt a szín logikai szerkezete zárja ki." (6.3751)

Nem törekszünk arra, hogy modelljeinkben megfeleljünk mind a hat megjegyzésnek, ugyanis nem a *Tractatus*nak a színek mibenlétével kapcsolatos álláspontját szeretnénk rekonstruálni, hanem azt keressük, elhelyezhetők-e a színek a *Tractatus* rendszerében, és ha igen, miképpen. Egy döntést azonban az egyszerűség kedvéért már most meghozunk: lévén hogy a látómező pontjainak vagy foltjainak ontológiai státusa felettébb kérdéses, a modelljeinkben nem pontoknak vagy foltoknak, hanem tárgyaknak fogunk színt tulajdonítani. Ez csak látszólag mond ellent **Sz2**-nek. Ez a megjegyzés ugyanis nem állítja azt, hogy egy tárgynak nem lehet értelmesen színt tulajdonítani. Csupán annyit mond, hogy a tárgyak önmagukban, az összefüggések kötelékén kívül nem rendelkeznek színnel (vö. 2.0231). Más részről **Sz3** sem azt állítja, hogy a tárgyak formájához hozzátartozna a színük. Ha így értenénk a megjegyzést, akkor a szín analógiájára abszurd módon a teret és az időt is a tárgy formájának kellene tekintenünk. Természetesen nem a tér maga komponense a tárgy formájának, hanem az, hogy a tárgy térbeli. Hasonlóképpen: nem egy konkrét szín, hanem a színesség komponense a tárgy formájának; az, hogy színnel rendelkezik. A tárgy önmagában nem színes, de a színesség „lehetősége már eleve el van döntve a dologban" (2.012). **Sz3**-nak ez az olvasata már összhangban van **Sz2**-vel: mindkettő amellet foglal állást, hogy a szín materiális tulajdonság. (Az 5. modell kivételével ehhez is tartani fogjuk magunkat.)

A fentiek értelmében elméletünk utolsó, színkizárási axiómáját a következőképpen fogalmazzuk meg:

TO6 A tárgyak rendelkezhetnek színnel; de lehetetlen, hogy egyazon tárgy két különböző színnel rendelkezzen.

2.3. Modellek a tractatusi ontológiához

Rátérünk a modellek megszerkesztésére. Az 1. modell csak **TO1-4**-et elégíti ki; a 2., 3. és 4. modell már **TO5**-öt is. E modellek elsődleges szerepe az, hogy megmutassák, mit is jelent az összefüggések függetlenségének kritériuma. Végül az 5., 6., 7. és 8. modellek már a színkizárási probléma lehetséges megoldásai; ezek mind a hat axiómánkat kielégítik.

TO1-4 teljesülése minden egyes modellben közvetlenül következik a modell elemei és a **TO**-beli alapfogalmak közötti megfelelésekből.

A modellek leírásában a következő jelölésekkel élünk: az összefüggéseket alkotó tárgyakat és az elemi kijelentéseket alkotó neveket kötőjellel kapcsoljuk össze, s ezzel feltételezzük, hogy az összefüggések tárgyak, az elemi kijelentések pedig nevek sorozatai. Nem ez az egyetlen lehetséges pontosítása a *Tractatus* megfogalmazásának, amely szerint „[az] összefüggésben a tárgyak úgy kapcsolódnak egymásba, mint a láncszemek a láncban" (2.03); mindenesetre a modelljeink leírásához egy kivétellel ez a megoldás is megfelel. Ez az egy kivétel a 2. modell lesz, amelyben elágazó struktúrájú összefüggéseket és elemi kijelentéseket is megengedünk.

A pontosság megkívánná, hogy megkülönböztessük egymástól azokat a jeleket, amelyekkel magukra a tárgyakra utalunk, és azokat, amelyekkel a neveikre. Nem bonyolítjuk ezzel tovább a modellek esetenként amúgy is komplikált bemutatását; a kontextusból mindig egyértelműen kiderül, hogy a tárgyról vagy annak nevéről van-e szó.

1. modell

Bevezető modellünkben az összefüggések fizikai testek térbeli konfigurációi. A magyarul puzzle néven ismert kirakósjáték rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy benne az elemek alakja meghatározza az összes lehetséges konfigurációt, amelyben előfordulhatnak. Ennek megfelelően ebben a modellben a puzzle-játék egyes elemei képviselik a tractatusi tárgyakat; a tárgyak formája az elemek alakja lesz, az összefüggés két elem kapcsolata, az összefüggés fennállása pedig e kapcsolat létrejötte. **TO1-4** mellett teljesül **TO5** egyik említett következménye is: a kirakó két eleme közötti kapcsolat elemi, hiszen nem bontható fel további elemek kapcsolatára. Másrészt viszont egy elem más elemekkel való kapcsolódási lehetőségeit ideiglenesen megváltoztatja a másik elemmel létesített kapcsolata; így a másik következmény nem teljesül. Már ebből is következik, hogy **TO5**-öt sem elégíti ki ez a struktúra. (A fejezet végi repülőoldal első ábráján látható, hogy az $a-b$, $b-d$ és $a-c$ kapcsolatok létrejöttének logikai következménye a $c-d$ kapcsolat létrejötte.) Általánosságban megállapíthatjuk, hogy néhány primitív kivételtől eltekintve **TO5** nem elégíthető ki olyan modellekkel, amelyekben az összefüggések egyedi testek térbeli konfigurációi.[9]

[9] Ilyen primitív kivétel lehetne például egy olyan puzzle-készlet, amely összesen két darabból áll.

2. modell

A második modell kémiai jellegű. A tárgyak itt is térben konfigurálódnak. Ezúttal azonban mindössze két tárgyunk van: a hidrogén- és a szénatom mint típus (tehát nem egyes atom-példányok). Összefüggéseken pedig lehetséges szénhidrogén-molekulák típusait értjük. Egy ilyen összefüggés akkor áll fenn, ha az adott molekula létezik, vagyis fellelhető a természetben, vagy sikerült laboratóriumi körülmények között előállítani. Az atomok lehetséges elrendezéseit meghatározzák a külső elektronhéj tulajdonságai (legalábbis nagyjában-egészében; az egyszerűség kedvéért minden más tényezőtől eltekintünk): a hidrogénnek egy szabad elektronja van, míg a szénnek négy. Ezt a tulajdonságot nevezhetjük az atomok kémiai formájának; ez felel meg modellünkben a tárgyak formájának. Az a tény, hogy egyik vagy másik szénhidrogén-molekula már létrejött vagy még nem jött létre, nem vonja maga után, de ki sem zárja más szénhidrogének létrejöttét. Tehát **TO5** is teljesül, a következményeivel együtt: egyrészt egy molekula létrejötte sem vezethető vissza más molekulák létrejöttére, illetve létre nem jöttére, másrészt a létrejött molekulák nem hatnak vissza a bennük szereplő atomok kémiai formájára. Vegyük észre, hogy ebben a modellben az összefüggések összesen két tárgyból állnak; ezek azonban többször is szerephez juthatnak egy adott összefüggésben. A térbeli összefüggések függetlenségének követelményét láthatólag sokkal egyszerűbb típusokkal teljesíteni, mint példányokkal. (Lásd a 2. ábrát a fejezet végén.)

3. modell

Következzen most egy pikáns modell. A tárgyak kapcsolata az összefüggésekben itt már nem térbeli. Tekintsünk egy társaságot, amelynek tagjai között nők és férfiak egyaránt találhatók. A társaság minden egyes tagja rendelkezik nemi orientációval; egyesek a nőkhöz, mások a férfiakhoz vonzódnak. E modellben a tractatusi tárgyaknak a társaság tagjai felelnek meg, az összefüggéseknek pedig a társaság valamely tagjának a társaság egy másik tagja iránti lehetséges vonzalma. (Noha ez nem szükségszerű, eltekintünk a mindkét nem iránti orientáció és a narcisztikus vonzalom lehetőségétől.) Egy összefüggés fennállása természetesen a vonzalom létrejötte lesz. A társaság tagjainak nemi formáján az illető nemét és nemi orientációját értjük; ez felel meg a modellben a tractatusi tárgyak formájának. A társaság egyes tagjainak nemi formája határozza meg, hogy milyen vonzalmak alakulhatnak ki: A akkor és csak akkor vonzódhat B-hez, ha B abba a nembe tartozik, amelyikhez A orientálódik. Ez a modell is teljesíti az összefüggések függetlenségének kritériumát: az, hogy egyes személyek között létrejött-e vonzalom, sem maga után nem vonja, sem ki nem zárja más vonzalmak létrejöttét. (Nem követeltük meg például a vonzalmak monogám jellegét.) Természetesen az egyes vonzalmak nem bonthatók komponensekre, és létrejöttük vagy létre nem jöttük nem befolyásolja a társaság tagjainak nemét és nemi orientációját. (Lásd a 3. ábrát a fejezet végén.)

4. modell

Az újabb modell csupán annyiban tér el az előzőtől, hogy itt a nemi vonzalmat magát is tárgynak tekintjük. E tárgy formája már körülményesebben írható le, de továbbra is értelemszerű: nők felé orientálódókat kapcsolhat össze nőkkel és férfiak felé orientálódókat férfiakkal. Ez tehát az előző, nominalista modell realista változata. Az elemi összefüggések itt három tárgyból állnak: a vonzódó félből, a vonzalomból és a vonzalmat elszenvedőből. A 3. modellről tett megállapításaink – *mutatis mutandis* – itt is érvényesek. E módosított modell szerepeltetésével csupán az volt a célunk, hogy megmutassuk: a realista és a nominalista olvasatok közötti döntés – annyi szakirodalmi vita tárgya – az összefüggések függetlenségének kérdésében nem játszik szerepet.

A következő modelljeink már a színkizárási axiómát is kielégítik. Az egyes modellek eltérő ontológiai státust és eltérő logikai szerkezetet tulajdonítanak a színeknek.

5. modell

Ismét a 3. modellt módosítjuk, éspedig a következőképpen. A társaság tagjait ezúttal nemcsak nemük és nemi orientációjuk, hanem hajszínük és hajszín-preferenciájuk is jellemzi. Egy személy akkor és csak akkor vonzódhat egy másikhoz, ha az megfelel nemi és hajszínbeli preferenciájának. Egyebekben változatlanul hagyjuk a modellt. Az összefüggések függetlensége természetesen e módosításban is érvényes marad. Teljesül továbbá a színkizárást megfogalmazó **TO6** axióma is: egyetlen személynek sem lehet két különböző hajszíne. Ez azonban nem a modell szerkezetéből, hanem a hajszín fogalmából és a hajviseleti szokásokból következik; a színkizárási elv itt ugyanúgy csupán önkényes döntés eredményeként teljesül, ahogy önkényesen zárjuk ki például a többszörös hajszín-preferencia lehetőségét is. (Lásd a 4. ábrát a fejezet végén.)

E modell sajátossága, hogy benne egy tárgy színe egyike azoknak a formális tulajdonságoknak, amelyek meghatározzák, hogy milyen konfigurációkban szerepelhet. Az, hogy valaki szőke vagy barna, nem tény, hanem tények előfeltétele. Ennek két súlyos következménye van. Az egyik az, hogy a tárgyak színe örökérvényű; a másik az, hogy a tárgyak színéről nem lehet értelmes kijelentéseket tenni: a hajszín nem kimondható, hanem csupán megmutatkozik a vonzalmakról tett kijelentésekben. Ez természetesen ellentmond **Sz2**-nek, és **Sz3**-mal is csak látszólag van összhangban. A szín a *Tractatus* felfogásában anyagi és nem formális tulajdonság; egy tárgy úgy tesz szert színre, hogy összefüggésekben más tárgyakhoz kapcsolódik.

6. modell[10]

Ebben a modellben a tárgyak két kategóriába sorolódnak. Az egyikbe fizikai tárgyak tartoznak; mondjuk, biliárdgolyók. A másik kategória mindössze három absztrakt tárgyat tartalmaz; a *vöröset*, a *zöldet* és a *kéket*. Nevezzük ezeket egyszerű színeknek. Ebben a modellben – a következőkhöz hasonlóan – a tárgyak formáján kategóriájukat értjük. Egy-egy összefüggés egy biliárdgolyó és egy egyszerű szín kapcsolata lesz; az összefüggés fennáll, ha a biliárdgolyó rendelkezik az adott színnel. Az egyszerű színek nem zárják ki egymást; egy biliárdgolyó rendelkezhet egyszerre több egyszerű színnel. Ezzel teljesül az összefüggések függetlenségéről szóló **TO4** axióma. Az egyszerű színek mellett összetett színeket is megkülönböztetünk ebben a modellben; ezekre már érvényes lesz a színkizárási axióma. Az összetett színek már nem tárgyak, hanem egyszerű színek meglétéből, illetve hiányából előállt amalgámok. A köznyelvi színkijelentésekben nem egyszerű, hanem összetett színek nevei szerepelnek; az egyszerű színek tehát a szó köznyelvi értelmében nem színek. Egyszerű színnevekkel csak a színkijelentések logikai elemzése során találkozunk. A követhetőség érdekében az egyszerű színneveket a továbbiakban kiskapitálissal különböztetjük meg. Legyen a a biliárdgolyók egyike. Az 'a ciánszínű' kijelentés logikai elemzése az 'a nem VÖRÖS és a ZÖLD és a KÉK' kijelentést adja eredményül, az 'b zöld' elemzése pedig nem 'b ZÖLD', hanem 'b nem VÖRÖS és b ZÖLD és b nem KÉK' lesz. (Lásd az 5. ábrát a fejezet végén.)

A színkijelentések közötti alapvető viszonyokat az alábbi táblázat szemlélteti (vö. 4.31):

[10] A fejezet egy korábbi változatának elkészülte után került a kezembe G. H. von Wright esszéje, amely gyakorlatilag az ebben az alfejezetben leírt megoldást vázolja a színkizárási problémára: Wright [1996].

a VÖRÖS	a ZÖLD	a KÉK	
I	I	I	a fehér
H	I	I	a cián
I	H	I	a bíbor
I	I	H	a sárga
H	H	I	a kék
H	I	H	a zöld
I	H	H	a vörös
H	H	H	a fekete

A táblázatból az is kiolvasható, hogy az összetett színek páronként kizárják egymást. A *Tractatus*ban természetesen nem találjuk nyomát az egyszerű és az összetett színek megkülönböztetésének; ez a modell specifikuma.

E modell gyengesége, hogy összesen nyolc színt tartalmaz. Finomíthatjuk a színek felbontását, ha az egyszerű színek kategóriájában bevezetünk egy újabb tárgyat, a *sötétet*. Így már sötétkék, szürke stb. színeket is tudunk keverni; összesen 16 összetett színre teszünk szert. Természetesen további jól megválasztott tárgyak bevezetésével még tovább növelhetjük az összetett színek számát, de a színárnyalatok teljes spektrumát aligha lehet ezen a módon modellezni.

7. modell

A következő modellben is két kategóriába soroljuk a tárgyakat. Ahogy az imént, most is azonosítjuk a tárgy formáját a kategóriájával. Az első kategóriába ismét biliárdgolyók tartoznak. A második kategóriát azonban nem egyszerű színek, hanem megszámlálhatóan végtelen sok igencsak sajátos objektum alkotja. Modellünkben csak olyan színeket szerepeltetünk, amelyek egyetlen hullámhosszal jellemezhetők. A fényhullám színét hullámhossza határozza meg; ez jól megválasztott mértékegység mellett egy 0 és 1 közötti valós szám. E számok pedig a szokásos módon kifejezhetők valamely számrendszerben számjegyek végtelen sorozataként. Más szóval: minden fényhullám színe megadható egy olyan függvénnyel, amely számjegyeket rendel az egyes számjegy-pozíciókhoz valamely számrendszerben.

A hullámhosszokat kettes számrendszerben fogjuk ábrázolni. A könnyebb kifejtés kedvéért érdemes bevezetnünk a bináris hely fogalmát. Tekintsük például azt a számot, amit a tízes számrendszerben 0,75-ként adunk meg. Ezt kettes számrendszerben a 0,11000. . . jelsorozat képviseli. Tekintsük a tizedesvessző előtti helyet nulladiknak. Így a számjegyek sorában a nulladik helyen nulla áll, az elsőn 1, a másodikon 1, az összes további helyen pedig 0. Ezeket a helyeket nevezzük bináris helyeknek.

A kettes számrendszer esetében a hullámhosszt megadó függvényt tekinthetjük az azon helyek halmazát kiválasztó karakterisztikus függvénynek, amelyeken 1 áll a számjegyek sorozatában. Ezt az elgondolást ragadjuk meg modellünkben a következőképpen: minden egyes bináris helyet egyszerű tárgynak tekintünk. Ezek a helyek alkotják a második kategóriát. Az első kategória bármely objektuma – tehát bármelyik biliárdgolyó – összekapcsolódhat a második kategória bármely objektumával – tehát bármely bináris hellyel. Modellünkben az ilyen elemi kapcsolatok lesznek az összefüggések. Ha egy ilyen kapcsolat létrejön, azt úgy értelmezzük, hogy a kapcsolatban szereplő fizikai tárgy színének megfelelő, mikrométerekben kifejezett hullámhossz kettes számrendszerbeli alakjának azon a helyén, amelyet a kapcsolatban szereplő második kategóriabeli tárgy képvisel, 1 áll; ha pedig nem jön létre a kapcsolat, akkor ugyanezen a helyen a 0 áll. Tegyük fel például, hogy az a tárgy a 0,1100101… hullámhosszú s színnel rendelkezik (ez a vörös egy árnyalata). Jelölje h_n az n-edik bináris helyet. Modellünk az 'a s színű' kijelentés következő elemzését implikálja: „$a - h_1$ és $a - h_2$ és nem $a - h_3$ és nem $a - h_4$ és $a - h_5$ és nem $a - h_6$ és $a - h_7$ és …”.[11] (Lásd a 6. ábrát a fejezet végén.)

Az összefüggések függetlensége következik abból, hogy a bináris helyek egymástól függetlenül rendelődnek a biliárdgolyókhoz. A színkizárási axiómát pedig a következők miatt elégíti ki a modell. Tegyük fel, hogy az a tárgy egyszerre rendelkezik két különböző színnel. A két szín hullámhosszának legalább egy helyen el kell térni egymástól: legyen h_n egy ilyen hely. A h_n bináris helyen az egyik hullámhossz kifejtésében 0 áll, a másikban 1. Ez azt jelentené, hogy az a – h_n összefüggés egyszerre fenn is áll meg nem is. Ez lehetetlen; a feltevést tehát el kell vetni.

Természetesen a fentebb megadott elemzési mód csak tökéletesen precíz színkijelentések esetén alkalmazható. A köznyelvi színkijelentések nem ilyenek. Még ha feltételezzük is, hogy színkifejezéseink élesen határoltak, akkor sem egyetlen hullámhosszal, hanem egy hullámhossz-tartománnyal jellemezhetők. A színkijelentésekben így végtelen sok hullámhossz-hozzárendelés alternációját kell elvégeznünk; ez azonban nem változtat azon, hogy az a színéről tett kijelentés az '$a - h_1$', '$a - h_2$', … kijelentések igazságfüggvénye.[12]

[11] Feltételezzük, hogy a *Tractatus* nyelvelmélete megenged végtelen argumentumú igazságműveleteket. Ezzel kapcsolatban ld. a 3. fejezetet.

[12] Azzal, hogy hullámhossz helyett hullámhossz-nyalábot rendelünk színkijelentésekhez, természetesen csak elodázzuk, de nem oldjuk meg a köznyelvi színkijelentések homályosságának problémáját. Ez a probléma nagyon súlyosan érinti a *Tractatus* kijelentéselméletét, hiszen precíz logikai elemzést csak precíz kijelentésről tudunk adni, de nem szívesen minősíthetünk minden hozzávetőleges kijelentést

A bináris helyek tárgyakként való értelmezése kontraintuitív lépés, és ráadásul a *Tractatus* szövegében sehol nem találunk olyan utalást, amely támogatná ezt az ötletet. Ugyanakkor ellene is csak az önkényessége szól. A színkijelentések helyes elemzése ugyanis többek között azon is múlik, hogy milyen egységekben mérjük a fény hullámhosszát. Meglehetősen furcsa feltételezés, hogy konvencionális hosszmértékegységeink mellett létezik egy természetes egység is; de ezt a lehetőséget kizárni semmiképpen sem lehet. Mindenesetre érdemes megjegyezni, hogy ha a *Néhány megjegyzés...* módjára az elemi kijelentések integráns részeinek tekintjük a számokat, a mértékegység önkényes megválasztásának problémája szintén fellép. Erre a kérdésre még visszatérünk a 2.4. szakaszban.

8. modell

Az előző modell hiányossága, hogy bár végtelen sok szín van képviselve benne, ezek mind a legegyszerűbb fajtából valók: azok, amelyek egyetlen hullámhosszal jellemezhetők. A következő elemzés viszont numerikus értelemben talán a legkimerítőbb, ami a színekre adható: minden egyes szín olyan függvény, amely kellően szűk hullámhossztartományokhoz rendel intenzitást. Ha egy adott hullámhossz nem található meg egy adott színben, akkor az ehhez a hullámhosszhoz tartozó intenzitás 0; ha megtalálható, akkor a hozzá tartozó intenzitás egy pozitív valós szám. Két szín akkor és csak akkor különbözik, ha van legalább egy olyan hullámhossz, amelyhez tartozó intenzitásuk eltér. Minden ilyen függvényhez tartozik egy logikailag lehetséges szín. Utolsó modellünk ezt az elemzést követi. A tárgyak ezúttal három kategóriába sorolódnak; természetesen a tárgyak formája itt is a kategóriájuk. Az első kategóriába a megszokott biliárdgolyók tartoznak. A lehetséges hullámhosszok alkotják a második kategóriát (ezúttal tehát nem a bináris helyeik, hanem maguk a számok); a harmadik kategóriába pedig az intenzitások mértékének bináris helyei kerülnek. Egy összefüggés három tárgy konfigurációja, rendre az első, a második és a harmadik kategóriából. Ha a egy biliárdgolyó, l egy hullámhossz és h_n egy bináris hely, akkor az a – l – h_n összefüggés fennállásán azt értjük, hogy a színének l hullámhosszú komponense olyan intenzitással rendelkezik, amelynek mérőszámát kettes számrendszerben felírva az n-edik helyen 1 szerepel. Az 'a az s színnel rendelkezik' kijelentés az s szerkezetét megadó függvény ismeretében végtelen sok '$a - l - h_n$' formájú elemi kijelentés igazságfüggvényeként elemezhető. (Lásd a 7. ábrát a fejezet végén.)

értelmetlennek; szerencsénkre azonban ez nem függ össze közvetlenül a színkizárási problémával.

Azt, hogy a modell kielégíti **TO5**-öt és **TO6**-ot, ugyanúgy lehet megmutatni, mint az előző modell esetében. Ez a modell demonstrálja, hogy a színárnyalatok tetszőlegesen finom felbontása mellett is összeegyeztethető az összefüggések függetlenségének tractatusi tézise és a színkizárás.

2.4. A Mátrix színei

A *Néhány megjegyzés...* fentebb idézett bekezdéseiben Wittgenstein ragaszkodik ahhoz, hogy a tárgyaknak színt tulajdonító kijelentések logikailag elemiek. Ezt alátámasztandó egy, a logikai elemzésükre tett kísérletről ki is mutatja, hogy hibás. Az előző fejezet utolsó három modelljében a színkijelentéseket, *pace* Wittgenstein, összetett kijelentésnek tekintettük, és elemzésüknek három alternatív módját mutattuk be. A Wittgenstein által központi problémaként emlegetett fokozatok problémáját valójában csupán a 7. és a 8. modell kísérli meg megoldani; a 6. csak durva beosztású színskálával boldogul.

Az utolsó két modell azonban két kellemetlen sajátossággal is bír: egyrészt olyan abszurditások szerepelnek bennük tárgyak gyanánt, mint a bináris helyek; másrészt a színkijelentések elemzése olyan, nyilvánvalóan önkényes mozzanatokat is tartalmaz, mint az abbéli döntés, hogy a hullámhosszokat – mondjuk – mikrométerben vagy mikroyardban számoljuk. Az első kellemetlenséget talán könnyebb elviselni. A bináris helyek nem is olyan rossz jelöltek a tractatusi objektum státusára: egyszerűek, térbeli-időbeli változásoknak nincsenek kitéve, és meghatározott logikai formával rendelkeznek, amely meghatározza kapcsolódási lehetőségeiket. Mindenesetre lényegesen kisebb kompromisszum az ilyen tárgyak megengedése, mint ha a *Néhány megjegyzés...* javaslatát követve megengednénk, hogy számjelek szerepeljenek elemi kijelentésekben. Sokkal súlyosabb problémát jelent azonban a mértékek önkényes megválasztása.

Ha a kijelentések logikai elemzése során előfordulhat olyan önkényes mozzanat, amely kihat az elemzés végeredményére,[13] akkor vagy arról kell lemondanunk, hogy a valóságnak és a nyelvnek közös logikai szerkezete van, vagy arról, hogy ez a logikai szerkezet a nyelv logikai elemzése révén hozzáférhetővé válik. Mindkét lehetőség egyaránt végzetes a *Tractatus* rendszerére nézve; de az első, ha lehet ilyet mondani, végzetesebb, mint a második. Ez ugyanis azzal járna, hogy elvetjük a tractatusi nyelvi-ismeretelméleti metafizika gerincét adó képelméletet. A második választási lehetőség viszont azt jelenti, hogy

[13] Nem hat ki például az elemzés végeredményére, hogy a p kijelentést az első lépésben q és p' konjukciójaként, majd p'-t r és s konjunkciójaként elemezzük, vagy előbb p'' és s konjunkcióját ismerjük fel p-ben, majd q és r konjunkcióját p''-ben.

amit a színkizárási probléma megoldásával nyertünk, azt a világ logikai szerkezetének hozzáférhetetlenségével elvesztettük. (A teljes logikai elemzés *gyakorlati* lehetőségéről egyébként a *Tractatus* maga is ambivalensen nyilatkozik. Egyrészt kijelentéseink logikai szerkezetét „az ember számára lehetetlen" a köznyelvből közvetlenül kiemelni (4.002); másrészt viszont „[a]kkor értjük a kijelentést, ha értjük az alkotórészeit" (4.024). Jelen gondolatmenetünkben persze nem a kijelentések megértésének spontán folyamatáról van szó, hanem a módszeres logikai elemzésben felbukkanó esetleges önkényes mozzanatokról.)

Egyáltalán: van-e arra bármi esély, hogy a világ és a nyelv közös logikai szerkezete a fokozatoknak a 7-8. modellben előadott elemzését vagy valami ehhez hasonlót kövessen? A válasz meglepő módon: igen, éspedig akkor, ha abban a szituációban vagyunk, amelyet néhány évtizede az *agyak a tartályban* gondolatkísérlettel írtak le, s amelyre mostanában *Mátrix-hipotézisként* hivatkoznak.[14] Észrevehetjük ugyanis, hogy a fokozati kijelentések a 7. és a 8. modell által implikált elemzés során mintegy digitalizálódnak; egymástól független *igen-nem*-komponensekre bomlanak. Ez akkor tükrözi helyesen a valóságot, ha az maga is digitalizált; erre pedig a legkézenfekvőbb eshetőség az, hogy a valóságot számítógép szimulálja. Bárki, aki leül a számítógépéhez és játszik, képet néz vagy akár csak virtuális géppapírra ír rajta, ilyen szimulációban részesül, és – *nota bene* anélkül, hogy ennek tudatában lenne – megoldva látja a színkizárási problémát. Az 'a k képpont s színű' kijelentés a számítógép működését elemezve független elemi komponensekre bontható, miközben a képernyő egy pontjának egyszerre csak egy színe lehet; a digitalizált kép kielégíti a szakirodalomban összeegyeztethetetlennek tartott **TO5**-öt és **TO6**-ot.

Egy jelenséget fokozati jelenségnek nevezhetünk, ha leírásában fokozatokra kell hivatkoznunk. Nem tudom, hogy minden fokozati jelenséget lehet-e számítógéppel szimulálni; az azonban biztos, hogy ha lehet, akkor az a *Tractatus* szabályai szerint történik. Aforisztikusan fogalmazva: a világ jelenségei akkor és csak akkor szimulálhatók számítógéppel, ha a színkizárási probléma megoldható a *Tractatus* rendszerében. A szimuláció során a fokozati jelenségeket független elemi összetevőkre bontjuk anélkül, hogy megsértenénk a színkizárási elvet. Ez a felbontás pedig, szimulációról lévén szó, miért is ne tartalmazna önkényes mozzanatokat?

Az eddigieknek természetesen ellene lehetne vetni, hogy a *Tractatus* keretei között az az elemzés, amely feltárja a számítógépes szimuláció elemi szerkezetét, nem tekinthető teljesnek a szó tractatusi értelmében, hiszen a számítógép viselkedése, a szimulációt

[14] A fejezetet 2003-ban írtam. Azóta a Mátrix-láz lecsengett.

vezérlő program stb. logikailag tovább elemezhető; az elemzés által feltárt logikai szerkezet így nem transzcendentális, hanem immanens természetű. Ha tovább folytatjuk az elemzést, előbb-utóbb el kell jutnunk a teljes elemzésig és a végső, transzcendentális struktúrákig; a baj csupán az, hogy a kelleténél hamarabb megálltunk. Ez az ellenérv is felvet azonban egy problémát. Amellett, hogy – mint láttuk – a kijelentések logikai elemzésében olykor önkényesen kell döntenünk egyformán plauzibilis lehetőségek között, arra sincs semmilyen kritérium, hogy egy kijelentés elemzését mikor tekintheti az ember befejezettnek. S még ha netán el is érné egyszer a teljes elemzést, *ő maga sem tudná – hisz mindenen ott van a látszat.*

3. fejezet

A kvantifikáció helyes kezelése a *Tractatus*ban

3.1. Bevezetés

Gordon Baker szerint Wittgenstein „az igazságtáblázatokat és a kvantorok elemzését [nem technikai, hanem] filozófiai indoklással vezette be"; következésképpen „ezen elgondolások erényei és hátrányai függetlenek a matematikai logika bármely eredményétől".[1] Az értékelés első fele vitathatatlan, a következtetés azonban *non sequitur*. A *filozófia* nem varázsszó, hogy puszta kimondásával érvényteleníteni lehetne számunkra kellemetlen megfontolásokat. Ha a tractatusi kijelentéselmélettel szemben felhozható technikai ellenvetések bármelyike is helyesnek bizonyul, az a logikai elemzés alapelveit, ezeken keresztül pedig a *Tractatus* egész filozófiai felépítményét érinti. Éspedig éppen azért, mert az elemzés indoklása filozófiai.

Baker nem nevezi ugyan meg, hogy a logika mely eredménye veszélyeztethetné a kvantorok tractatusi elemzését,[2] mégis egyértelműnek tűnik, hogy a Church-tételről van

---

[1] Baker [1988], 73.o.

[2] Az idézett mondatot mindössze a *Vizsgálódások* 124. §-ára tett futó utalás követi. A hivatkozott helyen a következőket olvashatjuk a filozófia feladatáról: „A filozófiának a nyelv tényleges használatát nem szabad érintenie; tehát végső soron csak leírhatja. Mert nem tudja megalapozni sem. Mindent úgy hagy, ahogy van. A matematikát [...] úgy hagyja a filozófia, ahogy van, és semmiféle matematikai felfedezés nem tudja őt továbblendíteni. A »matematikai logika valamely fő problémája« számunkra ugyanolyan matematikai probléma, mint bármely másik." Bár a bekezdés alátámasztani látszik Baker értékelését, a látszat csal. A Vizsgálódások környező bekezdéseiben Wittgenstein a *Tractatus* logikafilozófiai álláspontja *ellen* érvel; a logikai felfedezésekkel szemben kívánatos attitűdöt a tractatusi attitűd ellentéteként mutatja be.

szó. Robert Fogelin 1976-os monográfiájában súlyos, heves vitát kiváltó ellenvetéseket fogalmazott meg a *Tractatus* kvantifikációfelfogásával szemben.[3] Ezeket a következőkben foglalhatjuk össze:

1. Wittgenstein logikai szintaxisa összeegyeztethetetlen a Church-tétellel.

2. A tractatusi szintaxisban nem állíthatók elő a vegyes kvantorelőfordulásokat tartalmazó ($\exists x \forall y \phi(x, y)$ vagy $\forall x \exists y \phi(x, y)$ formájú) kijelentések.

3. Wittgenstein receptjét követve még az egyszeresen kvantifikált ($\forall x \phi(x)$ formájú) univerzális kijelentések előállítása is problematikus.

Fogelin felvetéseit elsőként Peter Geach és Scott Soames, majd a következő években, jobbára az ő ellenérveiket ismételve mások is cáfolták.[4] A fejezet nagyobbik felében e vita érveivel és ellenérveivel szeretnék foglalkozni. Álláspontom a következőkben foglalható össze:

1. A Church-tétellel való ellentmondás látszólagos.

2. Mind Fogelin, mind vitapartnerei – a kijelentésfüggvény és a kijelentésváltozó tractatusi fogalmát más-más módon félreértve – részben hibás premisszákra támaszkodnak.

3. A Fogelin által tárgyalt kijelentésformák a kijelentésváltozó fogalmának megfelelő kezelésével rendbe tehetők.

4. Vannak azonban kijelentések, amelyek makacsabban állnak ellen a wittgensteini elemzésnek.

5. Ezek a makacsabb problémák is orvosolhatók a tractatusi kijelentéselmélet enyhe, de filozófiai szempontból nem ártalmatlan módosításával.

A fejezetben tárgyalt problémák meglepően bonyolultnak bizonyulnak; a részletek szétszálazása, valamint a vitában felmerült érvek és álláspontok bírálata fokozott óvatosságot igényel. Ezért a következő szakaszok fejtegetései olykor az nehézkességig részletesek és technikaiak lesznek. Hogy erőt gyűjtsünk, mielőtt belebocsátkoznánk a vita részleteibe, érdemes madártávlatból összevetni a kvantifikált kijelentések wittgensteini elemzését a mára standardizálódott változattal.

[3] Fogelin [1976], 70skk.o.

[4] Geach [1981], Soames [1983].

3.2. Kvantifikált kijelentések: előzetes kép

Egyvalamit fontos már a tárgyalás elején leszögeznünk: a tractatusi kvantifikációról folytatott vita nem a legszűkebb értelemben vett tractatusi kvantifikációról szól; ugyanis a szerzők rendre figyelmen kívül hagyják azt a *Tractatus* 5.531skk. pontjaiban bevezetett változóhasználati konvenciót, amely szerint az egyazon kontextusban előforduló változók értékelése eltérő kell, hogy legyen. A tractatusi $\forall x \exists y \phi(x, y)$ magában foglalja az $x \neq y$ megkötést (amely az azonosságjelet nem tartalmazó tractatusi szimbolikában kifejezhetetlen, viszont Wittgenstein sajátos elképzelése szerint *megmutatkozik* a változóhasználatban). A kontextus a hatókör határáig terjed; például $\forall x \phi(x)$ & $\exists y \psi(y)$ nem tiltja $x = y$-t. Hasonlóak érvényesek a változók és nevek viszonyára is. Ez rendkívüli mértékben megnehezíti a kifejezések kezelését, hiszen például a $\phi(x)$ jelölésből nem derül ki, hogy $\phi(x)$-ben pontosan mely nevek fordulnak elő.

Az egyszerűség kedvéért más szerzőkhöz hasonlóan a 3.8. szakasz kivételével nem fogjuk figyelembe venni ezt az idioszinkretikus változóhasználatot. Így tulajdonképpen nem a tractatusi kvantifikációval, hanem a klasszikus logika kvantifikált formuláinak a tractatusi logikai szimbolikában való kifejezhetőségével foglalkozunk. A 3.8. szakaszban látni fogjuk, hogy a kvantifikációval kapcsolatos nehézségek nem ebből az egyszerűsítésből erednek.[5]

A *Tractatus* logikai szimbolikájában a kvantorok nem alapjelek, hanem a mondatkonnektívumokhoz hasonlóan az együttes tagadás N-nel jelölt műveletére vezetődnek vissza. N határozatlan argumentumszámú művelet; argumentumai egy kijelentésváltozó lehetséges értékei. A kijelentésváltozó fogalma, mint látni fogjuk, meglehetősen problematikus, úgyhogy egyelőre tanácsos megelégednünk egy közelítő meghatározással. Az általános kijelentések konstrukciójában használt kijelentésváltozókkal kijelentések egy osztályának közös formai jegyeire utalunk (egy formális fogalomra); a változó értékei pedig a megfelelő formai jegyekkel rendelkező kijelentések. (4.126sk.) Az N művelet bemenete tehát egy szintaktikai jegyek alapján meghatározott kijelentésosztály, kimenete pedig egy kijelentés, éspedig a bemenet elemeinek együttes tagadása. A *Tractatus*

[5] Wittgenstein az azonos jelöletű változók közös kontextusban való használatának tiltásával nemcsak a fregei-russelli jelölésektől, hanem általában a változóhasználat antikvitásból eredeztethető hagyományával fordul szembe. A tiltás ennek ellenére nem teljesen kontraintuitív. A magyar köznyelvben például igaznak fogadjuk el azt a kijelentést, hogy *vannak emberek, akiknek egyetlen rokona sincs*, miközben hajlunk arra, hogy a *rokona* relációt reflexívnek tekintsük. Persze ellenpéldát sem nehéz találni; Wittgensteinnek abban az egyben egészen bizonyosan igaza van, hogy „[a] köznyelv megértését szabályozó hallgatólagos megállapodások rendkívül bonyolultak” (4.002).

szerint ez a művelet alkalmas tetszőleges kvantoros szerkezet kifejezésére.

A kvantorokra explicit meghatározás nem szerepel ugyan a szövegben, de az 5.52 pontban szereplő $N(\overline{\xi}) = \sim \exists x \phi(x)$[6] formulából kiolvasható a kvantorok és az N művelet viszonya. ξ egy kijelentésváltozó, $\phi(x)$ pedig egy kijelentésfüggvény, amelynek értékei egybeesnek ξ értékeivel. A kijelentésváltozó olyan változó, amelynek értékei kijelentések. A kijelentésfüggvény a kijelentésváltozó egy speciális esete; olyan kijelentésváltozó, amelynek értékeit egy $\phi(x)$, $\phi(x, y)$ stb. formájú szintaktikai függvény határozza meg. A kijelentésfüggvény úgy keletkezik a kijelentésből, hogy benne egy vagy több nevet változóval helyettesítünk.

Kijelentésváltozóhoz természetesen más módon is el lehet jutni; például értékeinek felsorolásával. Lássunk erre is két kézenfekvő példát! Az egyik: szélsőséges esetként a kijelentés maga is a kijelentésváltozó. Éspedig a p kijelentés egyetlen értéke önmaga: $(\overline{p}) = \{p\}$. A másik: a klasszikus kijelentéslogikai konnektívumok közismert tractatusi rekonstrukciója az N művelet véges és elemfelsorolással megadott argumentumú alkalmazását igényli. Példának okáért $p \;\&\; q = N(\overline{\xi})$ – ahol $\xi = \{N(\overline{p}), N(\overline{q})\}$.

A további kifejtésben – egészen a fejezet végéig – élni fogunk egy egyszerűsítéssel: adottnak vesszük, hogy a tractatusi elemi kijelentések Pa, aRb, $aSbc$ stb. formájúak, ahol P tulajdonság, R kétargumentumú reláció, S háromargumentumú reláció neve, a, b és c pedig individuumnevek. Egyszerűsítő feltevésünk szerint tehát a klasszikus elsőrendű nyelvek azonosságmentes zárt atomi formuláinak felelnek meg a tractatusi elemi kijelentések. A 4. fejezetben látni fogjuk, hogy ez messze nem az egyetlen interpretációs lehetőség. Két okból mégis mellette döntünk. Egyrészt enélkül reménytelenül és szükségtelenül tovább bonyolódna az érvelés; másrészt a tractatusi kvantifikáció feletti vita résztvevői ugyanezzel az egyszerűsítéssel éltek; igaz, jobbára reflektálatlanul. Nem foglalkozunk továbbá a másodrendű kvantifikáció lehetőségével sem (vö. 5.5261); nem használunk olyan kijelentésfüggvényeket, amelyekben predikátumnév helyén is áll változó.

Az individuumnevek helyére írható változókat x, y, z stb. jelöli. E változók lehetséges értékei a sajátos tractatusi változófelfogás szerint maguk az individuumnevek. Ezeket a $\phi(x)$kijelentésfüggvényben x helyére helyettesítve kapjuk meg a kijelentésfüggvény értékeit: $\phi(a)$, $\phi(b)$, $\phi(c)$ stb. $(\overline{\xi})$ ezen értékek összessége – tehát a $\{\phi(a), \phi(b), \phi(c), \ldots\}$ kijelentésosztály –, $N(\overline{\xi})$ pedig mindezen értékek együttes tagadása. $N(\overline{\xi})$ tehát egy

[6] Az eredetiben: $N(\overline{\xi}) = \sim(\exists x).fx$ Itt és máshol megtartottam a *Tractatus* idioszinkretikus jelöléseit; a korban általánosan használt logikai jelöléseket viszont átírtam a Ruzsa-iskolában szabványosult jelölésekre.

kijelentés; de mint minden kijelentés, egyben kijelentésváltozó is, amelynek egyetlen lehetséges értéke önmaga: $(\overline{(N(\bar{\xi})}) = \{N(\bar{\xi})\}$. Alkalmazzuk most erre az N műveletet! $N(\overline{N(\bar{\xi})})$ a $\phi(a)$, $\phi(b)$, $\phi(c)$ stb. kijelentések együttes tagadásának tagadása. Ezt tekinthetjük az egzisztenciális kvantifikáció tractatusi meghatározásának:

$$\exists x \phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} N(\overline{N(\bar{\xi})})$$

– ahol

$$\xi = \{\phi(a), \phi(b), \phi(c), \ldots\}$$

$\exists x \phi(x)$ tehát akkor és csak akkor igaz, ha a ξ-vel és $\phi(x)$-szel is jelölt kijelentésváltozónak legalább egy értéke igaz.

Az univerzális kvantorhoz némileg más úton juthatunk el. Induljunk ki $\phi(x)$ egy tetszőleges értékéből, a $\phi(a)$ kijelentésből! Alkalmazzuk rá – mint kijelentésváltozóra, amelynek egyetlen értéke önmaga – az N műveletet! $N(\overline{\phi(a)})$ tehát $\phi(a)$ tagadása. Legyen mármost χ az a kijelentésváltozó, amelyet $N(\overline{\phi(a)})$-ból kapunk úgy, hogy benne a-t változóval helyettesítjük! χ lehetséges értékei: $N(\overline{\phi(a)})$, $N(\overline{\phi(b)})$, $N(\overline{\phi(c)})$ stb. (ahol $\phi(b)$, $\phi(c)$ stb. $\phi(a)$-hoz hasonlóan önmagukat képviselő kijelentésváltozók). Alkalmazzuk χ-re is az N műveletet! $N(\overline{\chi})$ az $N(\overline{\phi(a)})$, $N(\overline{\phi(b)})$, $N(\overline{\phi(c)})$ stb. kijelentések együttes tagadása. Ezt tekinthetjük az univerzális kvantor tractatusi meghatározásának:

$$\forall x \phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} N(\overline{\chi})$$

– ahol

$$\chi = \{N(\overline{\phi(a)}), N(\overline{\phi(b)}), N(\overline{\phi(c)}), \ldots\}$$

$\forall x \phi(x)$ tehát akkor és csak akkor igaz, ha χ egyetlen értéke sem igaz; tehát ha $\phi(x)$ minden egyes értéke igaz (χ értékei ugyanis $\phi(x)$ értékeinek tagadásai).

E ponton érdemes felhívni a figyelmet egy logikafilozófiai szempontból nagyon fontos momentumra. Az általánosság nem az N művelet alkalmazásakor kerül a kijelentésbe, hanem már egy lépéssel korábban; akkor, amikor az egyedi kijelentésről áttértünk a kijelentésváltozóra. Mivel e változó értékei kijelentések, és mivel egytől-egyig részei a keletkező kvantifikált kijelentésnek, például a $\forall x Px$ kijelentés pontosan annyi részkijelentésből áll, amennyi individuum van; és általában is a kvantifikált kijelentések szintaktikai szerkezete tükrözi a kvantifikációs tartomány számosságát. Így tud Wittgenstein a kvantifikált kijelentések esetében megfelelni annak a nyelv egészével szemben támasztott általános követelményének, hogy „[a] kijelentésben pontosan annyi megkülönböztethető résznek kell lenni, mint az általa ábrázolt helyzetben. Mindkettőnek ugyanazzal a logikai (matematikai) számossággal kell rendelkeznie." (4.04)

A képelméleti vonatkozásokon túl a fenti észrevétel azt a zavarba ejtő tractatusi deklarációt is világosabbá teszi, hogy Wittgenstein „[a] *minden* fogalmát elkülönít[i] az igazságfüggvénytől” (5.521), miközben mint minden kijelentést, a *minden* szót tartalmazóakat is az N igazságművelet szukcesszív alkalmazásával szándékozik előállítani elemi kijelentésekből (6, 6.001), következésképpen mint minden kijelentés, ezek a kijelentések is az elemi kijelentések igazságfüggvényei (5). Az általánosság ugyanis nem az N művelettel, hanem a művelet argumentumának meghatározásával lép be a képbe.

Ennek fényében nagyon fontos, hogy N argumentumait a kvantorok rekonstrukciója során – szemben mondjuk egy soktagú konjunkció szerkezetének tractatusi rekonstrukiójával – nem felsorolással, hanem egy formális szabályra hivatkozva adjuk meg. A felsorolással szemben a formális szabály szükségszerűvé teszi az argumentumok osztályát, míg a puszta felsorolás – eltekintve a vele kapcsolatos gyakorlati nehézségektől – mindig esetleges. A fenti meghatározásokban persze látszólag felsorolással adtuk meg ξ értékeit; de csak látszólag. Az első néhány tag felsorolása és az azt követő három pont ugyanis egy általános szabályt fejez ki – vagy tractatusi fogalmakkal: a megkezdett felsorolásban megmutatkozik az általános szabály.

A fentebb rekonstruált tractatusi meghatározások szintaktikai és szemantikai szempontból is eltérnek a kvantifikáció ma bevett, Tarski-stílusú meghatározásától. Először is: ma az elsőrendű nyelvekben a két kvantor egyikét alapjelnek tekintjük, amely nem szorul más jelekkel való meghatározásra; a másikat pedig az alapjelnek tekintett kvantorral vezetjük be. Ami viszont az igazságfeltételeiket illeti: röviden és a Tarski-stílusú szemantikai definíciók technikai részleteinek mellőzésével úgy fogalmazhatunk, hogy $\forall x\phi(x)$ akkor és csak akkor igaz, ha $\phi(x)$-et az individuumtartomány összes eleme kielégíti; $\exists x\phi(x)$ pedig akkor és csak akkor igaz, ha $\phi(x)$-et az individuumtartományban legalább egy tárgy kielégíti.

A tractatusi meghatározás tehát mindenekelőtt abban tér el a ma bevettől, hogy tárgyak helyett nevekre hivatkozik. A kettő akkor és csak akkor ekvivalens, ha az adott formájú nevek jelöleteinek összessége egybeesik az adott formájú nevek tárgyak összességével. Ezt a feltételt a *Tractatus* természetesen teljesíti a tárgyak és a nevek közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel. E megfeleltetésnek két olyan következménye is van, amely a mai logikai nyelvek számára kényelmetlen volna. Az egyik: a nevek számossága megegyezik a tárgyak számosságával. Ha egy nyelv szimbólumait véges ábécéből képzett véges szavakként vezetjük be, ezzel számosságukat $\aleph_0$-ban maximáljuk. Mármost három lehetőség van: vagy meg kell mutatnunk, hogy a tractatusi tárgyak számosságát is felülről korlátozza $\aleph_0$, vagy le kell mondanunk az ábécé végességéről, és végül esetleg a nevek véges hosszának követelményéről is lemondhatunk. Az első tractatusi keretek között nem megy. A tárgyak számossága empirikus kérdés, és mint ilyen, független a *Tractatus*ban lefektetett logikai-metafizikai keretektől. (5.55) (A tárgyak számosságának kérdésére azért még visszatérünk a 3.4. szakaszban.) Marad a másik két lehetőség; a szintaxisban le kell mondanunk a finit eszközök kizárólagosságáról.

A másik következmény az, hogy a neveknek rögzített jelölettel kell rendelkeznie. E ponton nem árt némi óvatosság. Nem arról van szó, hogy a nevek a szó kripkei értelmében vett merev jelölők volnának, amelyek jelölete a nyelv különböző interpretációiban más és más, de egy interpretáción belül minden lehetséges világban ugyanaz. (A kripkei értelemben vett lehetséges világok a *Tractatus*ban nincsenek.) Hanem arról, hogy a neveknek egyetlen szándékolt interpretációja van, amely a nyelvnek nemcsak a szemantikáját, de a szintaxisát is meghatározza. A szintaxis tehát a *Tractatus*ban nem független a szemantikától.

A két tárgyalt kellemetlenség mégsem a tractatusi kvantifikációfelfogás következménye. A tárgyak és a nevek közötti, előzetesen rögzített kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a tractatusi metafizika centrumát jelentő képelméletnek is szükséges előfeltevése. A következőkben tárgyalt kifogások fókuszában viszont már a tractatusi kvantifikáció belső problémái állnak.

A következő szakaszokban élni fogunk még egy apróbb jelöléstechnikai egyszerűsítéssel: nem tesszük még egyszer zárójelbe az N művelet argumentumát, amennyiben azt már eleve zárójelek határolják. Ezzel az egyszerűsítéssel már Wittgenstein is él, amikor $N(\overline{\xi})$-t ír a következetesebb, de túlhabzó $N((\overline{\xi}))$ helyett. Akkor sem írunk újabb zárójelpárt az argumentum köré, ha azt kapcsos zárójelek határolják. Így például $N(\{\phi(a)\})$ helyett $N\{\phi(a)\}$-t írunk.

3.3. Az eldönthetőség problémája

Fogelin nyitó érve a következőképpen rekonstruálható.

1. Minden értelmes kijelentés előállítható az együttes tagadás műveletének elemi kijelentésekre való szukcesszív alkalmazásával. (6.001)

2. Ha egy kijelentést a fenti módon előállítunk, azzal egyben eldöntjük, hogy tautológia-e vagy sem. (6. 126)

3. Klasszikus elsőrendű nyelvekben nincs univerzális eldöntési eljárás a tautológia fogalmához. (Church-tétel; vö. pl. Ruzsa [1988], 131.o.)

E három állítás következménye, hogy mivel a tractatusi elemi kijelentésekből az N művelet szukcesszív alkalmazásával generált nyelvben a tautológia eldönthető fogalom, e nyelv kifejezőereje kisebb kell, hogy legyen az elsőrendű nyelvekénél. Más szóval: nem minden elsőrendű kvantoros szerkezet fejezhető ki a tractatusi logikai szimbolikában.

Az érv rendkívül impozáns, mert látszólag egymástól távoli kérdéseket kapcsol össze.[7] Ugyanakkor iskolapéldája a logikai eredmények óvatlan alkalmazásának.[8] A szavak más kontextusban mást jelentenek; bármilyen csábító is Wittgenstein megfogalmazásaiban felismerni a Church-tétel megfogalmazásakor is használt kifejezéseket, Wittgenstein nem ugyanazt érti elönthetőségen vagy kiszámíthatóságon, mint az algoritmuselmélet.

Mivel az adott formájú tárgyak számosságáról nem lehet előzetes tudomásunk, nem tudjuk, hogy egy kvantifikált kijelentés előállítása során mekkora kijelentésosztályra kell alkalmaznunk az N műveletet. Természetesen nem zárható ki, hogy minden kvantoros kijelentés előállítható véges argumentumosztályra alkalmazott N művelettel. Ehhez még csak nem is szükséges, hogy a tárgyak száma véges legyen; az viszont igen, hogy az egyazon formájú tárgyak osztályai végesek legyenek. Ebben az esetben a kijelentések előállítása az N művelet alkalmazásával a hilberti értelemben finit módszer. Ha viszont van olyan kvantoros szerkezet, amelynek előállítása során végtelen argumentumosztályra kell alkalmazni az N műveletet, akkor a módszer nem finit. Az első esetben azért nem kerülünk ellentmondásba a Church-tétellel, mert az korlátozatlan kvantifikációs tartományú nyelvekre vonatkozik, itt viszont az összes kvantifikációs tartományt végesre korlátoztuk. A második esetben pedig azért, mert a Church-tétel csak finit módszerekre vonatkozik.

Fogelin az eldöntési eljárás kapcsán a 6.126 és az 5.2-5.4 pontokra hivatkozik. Ezek a bekezdések felületesen olvasva valóban azt a látszatot keltik, mintha Wittgenstein finit eldöntési eljárásnak minősítené a kijelentések előállítását az N művelettel. Azonban ha ez is volna a bekezdések helyes értelmezése, ebből még mindig nem az következne, hogy a módszer hibás, hanem csak az, hogy Wittgenstein rosszul értékelte saját módszerét. Bár ennek megítélése nem tartozik a fejezet szorosan vett feladatához, mégis tanulságos egy pillantást vetnünk a hivatkozott szöveghelyek közül azokra, amelyekben a végesség

[7] Geach pl. afeletti értetlenségében, hogy mit keres az eldönthetőség problémája a kifejezhetőség tárgyalásában, figyelemre sem méltatja Fogelinnek ezt az érvét. Geach [1981/2], 128.o.

[8] Mindazonáltal nem csupán Fogelinnél bukkan fel. Glock is elővészi az igazságtáblázatok kapcsán, majd megállapítja, hogy a Church-tétel „nem cáfolja meg közvetlenül a *Tractatus*t", hiszen az igazságtáblázatokat Wittgenstein sem tartotta alkalmasnak általános kijelentések tautologicitásának eldöntésére (vö. 6.1203). (Glock [1996], 371.o.) Az N művelettel való előállítás módszerét azonban Wittgenstein minden kijelentésre kiterjesztette, ezért a főszövegben tárgyalt kérdés valamivel relevánsabb.

követelménye megfogalmazódik. A 6. 126-ban a következőket találjuk:

> Azt, hogy egy kijelentés a logikához tartozik-e, kiszámíthatjuk úgy, hogy kiszámítjuk a szimbólum logikai tulajdonságait.
> És ezt tesszük, amikor egy logikai kijelentést „bizonyítunk". Ugyanis anélkül, hogy értelemmel és jelölettel törődnénk, a logikai kijelentést puszta jelölési szabályok segítségével állítjuk elő más logikai kijelentésekből.
> A logikai kijelentések bizonyítása abban merül ki, hogy más logikai kijelentésekből, meghatározott műveletek szukcesszív alkalmazásával előállítjuk őket, és ezek a műveletek a kiinduló kijelentésekből újra tautológiákat hoznak létre.

A *Tractatus*t egyébként kiválóan ismerő Fogelin e ponton figyelmetlenül hivatkozza a szöveget. A szövegrész ugyanis nem a logikai kijelentések konstrukciójáról szól, amelynek során elemi kijelentésekből – tehát nem tautologikus kijelentésekből – meghatározott műveletek segítségével tautológiákat állítunk elő, hanem arról, amikor tautológiák tautológiákká alakításával bizonyítjuk kijelentések tautologicitását, tehát levezetést végzünk egy Frege-Hilbert stílusú kalkulusban. Ennek során valóban meghatározott műveletek véges számú, szukcesszív alkalmazásával állítunk elő tautológiákat. Gödel teljességi tétele értelmében előállítható ilyen módon finit eszközökkel egy elsőrendű nyelv bármely logikai igazsága, de ez az eljárás nem alkalmas tetszőleges kijelentés tautologicitásának véges cáfolására, tehát a legkevésbé sem mond ellent a Church-tételnek.

Fentebb már láttuk: ahhoz, hogy a Church-tétellel ellentmonásba kerüljünk, magának a kijelentések konstrukciójának kellene eldöntési eljárással szolgálna a tautologicitás elöntésére. Az 5.32-es pont e szempontból relevánsabb:

> Minden igazságfüggvény véges számú igazságművelet elemi kijelentésekre történő szukcesszív alkalmazásának eredménye.

Ahhoz, hogy ez a tézis alátámassza Fogelin ellenérvét, az igazságműveletek szukcesszív alkalmazásainak a hilberti értelemben finit módszernek kell lenni. Ez két feltételt támaszt a módszerrel szemben: 1. a kijelentések előállításakor minden igazságműveletet véges argumentumhalmazra kell alkalmaznunk; 2. egyetlen kijelentés előállításakor sem lehet szükség arra, hogy az igazságműveletek szukcesszív alkalmazásai végtelen sorozatot alkossanak. Már láttuk, hogy az első feltétel a kvantifikált kijelentések esetében nem feltétlenül teljesül, és ez önmagában is elég a Church-tétellel való ellentmondás cáfolásához. A második feltételnek azonban a Church-tételtől független jelentősége is van, ezért erre még vissza fogunk térni.[9]

3.4. Fogelin a tractatusi kvantifikációról

Fogelin a következőképpen mutatja meg a vegyes kvantifikáció kifejezhetetlenségét a tractatusi rendszerben: „Ha az N műveletet alkalmazzuk azokra a kijelentésekre, amelyek a $\phi(x, y)$ függvény értékei, a függvény mindkét argumentumhelyét egyszerre és ugyanúgy kezeljük. Tehát bármilyen kvantor fogja megkötni az egyik változót, ugyanolyan kvantor köti a másikat is."[10] Ebből következően a tractatusi eszközökkel nem lehet a modern logikai szintaxisban bevett módon, a $\phi(x, y)$ szerkezetből előállítani a $\forall x \exists y \phi(x, y)$ és a $\exists x \forall y \phi(x, y)$ kijelentéseket.

Fogelin egy alternatív előállítási módot is megvizsgál. Ennek során először a $\phi(a, y), \phi(b, y), \phi(c, y)$ stb. kijelentésfüggvényekből külön-külön előállítjuk az $N(\overline{\phi(a, y)})$, $N(\overline{\phi(b, y)})$, $N(\overline{\phi(c, y)})$ stb. kijelentéseket, amelyek definíció szerint rendre a $\sim \exists y \phi(a, y)$, $\sim \exists y \phi(b, y)$, $\sim \exists y \phi(c, y)$ stb. formuláknak felelnek meg. Ha most erre a kijelentésosztályra alkalmazzuk az N műveletet, a kapott $N\{\sim \exists y \phi(a, y), \sim \exists y \phi(b, y), \sim \exists y \phi(c, y) \ldots\}$ kijelentés definíció szerint a klasszikus elsőrendű nyelvek $\forall x \exists y \phi(x, y)$ kijelentésének felel meg; tehát sikerült előállítanunk egy vegyesen kvantifikált kijelentést.

Korai lenne azonban örülni. Az eljárásnak ugyanis az az ára, hogy egyenként elő kellett állítani az összes kijelentést, amelyek együttes tagadásával a végeredményt megkaptuk. Ha az instanciák száma véges, akkor ez csupán gyakorlati problémát jelent. Ha nem, akkor élnünk kell azzal a feltevéssel, hogy „– legalábbis logikai szempontból – semmi kifogásolható nincs egy végtelen sok diszkrét lépésből álló feladat végrehajtásában".[11] Az utóbbi lehetőséget azonban Fogelin elveti azzal, hogy szerinte a *Tractatus* egyértelműen kizárja műveletek végtelen sokszori szukcesszív alkalmazásának lehetőségét. Az általa felhozott textuális evidenciák ugyan nem túl meggyőzőek,[12] mégis egyetérthetünk az-

[9] Wittgenstein az 5.32-ben gyengébb formában fogalmazza meg kijelentéselméleti alaptézisét, mint a nevezetes 6. pontban és a környező bekezdésekben, ahol egyetlen igazságművelet szukcesszív alkalmazásairól beszél; jogosan, hiszen nyilvánvalóan nem N az egyetlen lehetséges választás. A műveleti bázis megválasztása azonban nem befolyásolhatja a végeredményt; ezért a továbbiakban ismét az N művelet alkalmazásaira szorítkozunk.

[10] Fogelin [1976], 71.o. Fogelin jelöléseit itt és a továbbiakban a jelen fejezet jelöléseihez igazítottam.

[11] I.m. 71.o.

[12] Az 5.32 pont például Fogelin értelmezésében nem véges sok igazságművelet tetszőleges sokszori alkalmazásáról, hanem a műveletek véges sokszori alkalmazásáról szól. Ez az értelmezés csak akkor volna legitim, ha Wittgenstein nem tenne különbséget a művelet és a művelet alkalmazása között.

zal, hogy a végtelen szukcesszív alkalmazási lánc gondolatát valóban nem támogatja a szöveg.

Ám ha az eddigiekben igazat adunk Fogelinnek, a baj ezúttal nagyobb, mint hogy következetlenségen kaptuk Wittgensteint. Egy művelet végtelen sokszori szukcesszív, vagyis „saját eredményére való ismételt” (5.2521) alkalmazása ugyanis logikai szempontból is kifogásolható. Mi lenne például az eredménye annak, ha az N műveletet végtelen sokszor alkalmazzuk szukcesszív módon egy p elemi kijelentésre? A p, $N\{p\}$, $N\{N\{p\}\}$ stb. sorozat minden egyes tagja a megelőző tag tagadása; a végeredményként kapott

$$\dots N\Big\{\dots N\{N\{p\}\}\dots\Big\}\dots$$

(szavakban: *p nem igaz; de ez sem igaz; de ez sem igaz; . . .*) kijelentésnek viszont nincs közvetlen előzménye. A sorozat tagjai felváltva igazak és hamisak, így az igazságértékek tekintetében nem konvergens. Ennek megfelelően csak önkényesen lehet igazságértéket rendelni a végeredményhez; ez pedig ellentmond mind annak a tractatusi alaptézisnek, hogy minden kijelentés az elemi kijelentések igazságfüggvénye (5), mind pedig annak, hogy a nyelv logikailag rendezett (5.5563).[13]

Az általunk vizsgált és a Fogelin által elutasított konstrukcióban közös, hogy mindkettőben végtelen sokszor kell alkalmazni az N műveletet. Van azonban egy fontos különbség. Az $\dots N\{\dots N\{N\{p\}\}\dots\}\dots$ szerkezetben önnön eredményére, tehát a tractatusi értelemben szukcesszív módon alkalmazzuk újra meg újra N-t; az $N\{\sim\exists y\phi(a,y), \sim\exists y\phi(b,y), \sim\exists y\phi(c,y)\dots\}$ szerkezetben viszont végtelen sok egymás eredményétől független, párhuzamos, nem pedig szukcesszív alkalmazás szerepel. Fogelin érvei a végtelen szukcesszív alkalmazási sorozatok ellen szólnak, tehát célt tévesztenek.

Mindazonáltal egy végtelen sok egymástól független részfeladatból álló feladat megoldásának gondolata is problematikus – ha nem is vezet olyan látványos logikai problémákhoz, mint a végtelen szukcesszív sorozatoké. Két nehézséget szeretnék kiemelni az iméntiek szerint korrigált fogelini álláspont védelmében. 1. Ha a Fogelin által bírált konstrukciót fogadnánk el, egy $\forall x\exists y\phi(x,y)$ formájú kijelentés helyes logikai elemzésének szükséges feltétele volna a kvantifikációs tartományba eső összes tárgy nevének

A megkülönböztetés azonban kulcsfontosságú a *Tractatus*ban; $N(\overline{N(\overline{\xi})})$-ben a két N ugyanannak a műveletnek két különböző alkalmazása.

[13] Nem tudok róla, hogy valaha is vizsgálták volna ezt a szerkezetet, amely igazságértéke tekintetében az *igazmondó* kváziparadoxonával, szerkezete tekintetében a *hazug* paradoxonnal rokon. Ha az önmagát tagadó *ez a mondat hamis* kijelentést a fenti minta szerint elemezzük, azt kapjuk, hogy $N\{N\{\dots N\{\dots\}\dots\}\}$ (szavakban: *nem igaz, hogy nem igaz, hogy nem igaz, hogy . . .*). Ennek a tagadási sornak vége van, de kezdete nincs; a főszövegbelinek viszont kezdete van, de vége nincs.

ismerete. Ez azt jelentené, hogy nemcsak az igazságérték megállapításához, de a megértéshez is kimerítő ismeretekkel kell rendelkeznünk elemi kijelentések egy esetleg végtelen osztályáról. Persze „az általános kijelentések megértése *érezhetően* függ az elemi kijelentések megértésétől" (4.411); de ez aligha jelenti azt, hogy minden egyes elemi kijelentést külön-külön ismernünk kell, amely az általános kijelentés instanciái között szerepel. 2. Ha egy vegyesen kvantifikált kijelentés konstrukciója végtelen sok logikai művelet elvégzését igényli, és a nyelvhasználók mégis képesek ilyen kijelentéseket előállítani véges időtartam alatt, akkor a műveletek végrehajtási idejének véges sorösszeget kell adnia, miközben a műveletek maguk nem egyszerűsödnek.

Ezek az érvek természetesen nem konkluzívak; a *Tractatus* Wittgensteinje nem arról híres, hogy visszariadt volna a kontraintuitív következményektől. Van azonban egy további szempont is, amivel meg lehet támogatni Fogelin álláspontját. Wittgenstein az 5.521. pontban azért bírálja Fregét és Russellt, mert „a logikai szorzat vagy a logikai összeg kapcsán vezette be az általánosságot". Az instanciák felsorolására alkalmazott együttes tagadás viszont éppen ezt elgondolást hozná vissza. A 3.2. szakaszban láttuk, hogy a wittgensteini N művelet nem egyszerűen a kétargumentumú *sem-sem* művelet kiterjesztése több argumentumra; az általános kijelentések esetében megkülönböztető jelentősége van annak, hogy ezek az argumentumok formális jegyeik alapján, egy kijelentésfüggvény értékeiként adottak.[14]

Tehát jó okunk van arra, hogy ha egyáltalán létezik más lehetőség a tractatusi keretek között a vegyes kvantifikáció elemzésére, akkor ne ezt a nehézkes és erőtlen végtelen konstrukciót válasszuk. Fogelin szerint más lehetőség nem adódik: vagy a $\phi(x, y)$ kijelentésfüggvényből indulunk ki, ami nem vezet el a kívánt eredményhez, vagy az instanciák felsorolásából, ami egyrészt végtelen kvantifikációs tartomány esetén kivitelezhetetlen, másrészt nemkívánatos logikai-nyelvfilozófiai hozadékai vannak.

De még mindig nem értünk a nehézségek végére. Fogelin ugyanis elemzése végén megjegyzi, hogy az általa felvetett problémák már az egyszeres univerzális kvantifikációval lezárt kijelentéseknél is felvetődnek. A $\forall x \phi x$ kijelentést a $\sim \phi(x)$ kijelentésfüggvény értékeire alkalmazott N művelet állítja elő. De hogy is jutunk el ehhez a függvényhez? A

[14] A Fogelin által bírált megoldási javaslat voltaképpen egybeesik a tractatusi kvantifikáció legnaivabb, de a népszerűsítő munkákban elterjedt olvasatával, amely szerint Wittgenstein egyszerű behelyettesítéses kvantifikációt vezet be, és a kvantifikált kijelentéseket soktagú konjunkciókként, illetve alternációkként kezeli. Lásd pl. Márkus [1963], 50sk.o.: „Wittgenstein a függvénykalkulust a kijelentéskalkulus részeként értelmezte". Márkusnak a tractatusi kvantifikációval szembeni kritikai észrevételei valójában nem a tractatusi, hanem a behelyettesítéses kvantifikációra vonatkoznak, és ebben a vonatkozásban jobbára helytállóak.

negáció természetesen nem más, mint az N művelet egyetlen argumentumra való alkalmazása; tehát $\sim\phi(x)$ további elemzéseként az $N(\overline{\phi(x)})$ szerkezet adódik. Ez azonban nem az, amit kerestünk, hiszen az N művelet argumentuma nem maga a kijelentésfüggvény, hanem annak összes értéke. $N(\overline{\phi(x)})$ tehát éppenséggel a klasszikus logikai jelölésekre $\sim\exists x\phi(x)$-ként fordítható kijelentés lesz, az $N(\overline{N(\overline{\phi(x)})})$ konstrukció pedig a tractatusi logikai szimbolika torz tréfájaként nem $\forall x\phi x$, hanem duálisa, $\exists x\phi x$ lesz.[15]

Ismét felsültünk tehát, amikor a tractatusi útmutatást követve, egy kijelentésfüggvényre támaszkodva próbáltunk kvantifikált kijelentést konstruálni. Marad a kevésbé elegáns megoldás a maga nehézségeivel: az instanciák egyenkénti felsorolása. Fogelin a $\forall x\phi x$ formájú kijelentések problémáját különös módon nem kezeli a vegyesen kvantifikált kijelentésekével egyenrangúként; miután bemutatta, sietve megpróbál megszabadulni tőle azzal, hogy ismét felveti egy korábbi, eltérő kontextusban tett nevezetes javaslatát a negatív elemi kijelentések bevezetésére.[16] Ha a negatív elemi kijelentéseket redukálhatatlannak tekintenénk, akkor Fogelin szerint kiindulhatnánk a $\sim\phi(x)$ kijelentésfüggvényből, és sikerrel előállíthatnánk $\forall x\phi x$-et $N(\overline{\sim\phi(x)})$-ként.

Tekintsünk el most attól, hogy a negatív elemi kijelentések bevezetése mennyire súlyosan érintené a tractatusi nyelvkoncepciót, és maradjunk meg a kvantifikáció problémájánál! Az ötlet természetesen csak akkor alkalmazható, ha $\phi(x)$ értékei elemi kijelentések. Ez a megkötés a korábbiakban egyáltalán nem szerepelt, és utólagos bevezetése jogosulatlanul korlátozná a tárgyalás általánosságát. Mit kezdjünk például a $\forall x(\phi(x) \supset \psi(x))$ és az $\exists x(\phi(x)\ \&\ \psi(x))$ formájú kijelentésekkel, ahol $\phi(x)$ és $\psi(x)$ értékei elemi kijelentések? A logikai hagyományban Fregéig ezeket tekintették az általános kijelentés alapesetének. Tudjuk, hogy $p \supset q = N\{N\{N\{p\}, q\}\}$, valamint $p\ \&\ q = N\{N\{p\}, N\{q\}\}$; próbáljuk meg ezeket a mintákat követni úgy, hogy a negatív elemi kijelentéseket redukálhatatlannak tekintjük! Az eredmény

$$N\Big\{N\{\sim\phi(x), \psi(x)\}\Big\}$$

– illetve

$$N\{\sim\phi(x), \sim\psi(x)\}$$

Némi ijedelemmel konstatálhatjuk, hogy a kapott formulák máris kiadják a keresett általános kijelentéseket, pedig a kvantifikációhoz el sem jutottunk. Kijelentéseket kaptunk ugyanis, nem pedig kijelentésváltozókat. Az első esetben N első alkalmazásával

[15] I.m. 74.o. Geach és Soames ezzel az érvvel nem foglalkoznak. Meglepő módon több későbbi, a vitára reflektáló munkában újra felbukkan: vö. Varga Von Kibéd [1993], 96sk.o.; Stokhof [2002], 83sk.o. Stokhof csak a vegyes kvantifikáció kérdésével kapcsolatban említi Fogelint (271.o.).

[16] Fogelin [1974].

megkaptuk mindazon kijelentések együttes tagadását, amelyek $\phi(x)$ valamely értékét tagadják, $\psi(x)$ megfelelő értékét pedig állítják; a második alkalmazással ezt tagadjuk. A második esetben N alkalmazásával tagadtuk mindazon kijelentéseket, amelyek tagadják mind $\phi(x)$ valamely értékét, mind $\psi(x)$ megfelelő értékét. Még rosszabb a helyzet a $\forall x(\phi(x) \supset (\psi(x)\ \&\ \psi'(x)))$ kijelentéssel; ezt a Fogelin által megadott módszerekkel még az iméntihez hasonló, nem várt módon sem lehet előállítani, akkor sem, ha redukálhatatlannak tekintjük a negatív elemi kijelentéseket.

A Fogelin által felvetett utolsó problémától tehát nem tudunk a Fogelin által javasolt megoldással megszabadulni. Ez végképp összezavarja a képet. Fogelin ugyanis a vegyes kvantorelőfordulásokkal kapcsolatos problémákkal visszaigazolva látja a Church-tétellel kapcsolatos előzetes megfontolásait; az elsőrendű nyelvek vegyes kvantorelőfordulásoktól mentes töredékei ugyanis eldönthetők. A tetszetős párhuzam elvész, ha az egyszeresen kvantifikált kijelentések is problematikusnak bizonyulnak. Azt persze már az eddigi elemzéseink is világossá tették, hogy a Church-tételnek nem sok köze van a kvantoros szerkezetek előállításának problémáihoz.

A következő szakaszokban számos kísérletet fogunk tenni a Fogelin által felvetett problémák megoldására. Ezek kivétel nélkül maguk is problematikusnak fognak bizonyulni.

3.5. Megoldási kísérlet az N művelet módosításával

Mielőtt Peter Geach a szakirodalomban ma jobbára[17] definitívnek tekintett megoldási javaslatait bemutatnánk, érdemes egy rövid kitérőt tenni egy kissé körülményes, de kézenfekvő megoldási lehetőség felé. A $N(\overline{N(\overline{\phi(x)})})$ szerkezettel azért nem a $\forall x\phi(x)$ kijelentést állítottuk elő, mert már N első alkalmazása is megkötötte az x változót, és így a második alkalmazás argumentuma már egyetlen kijelentés volt; a kvantifikáció tehát a szükségesnél egy lépéssel hamarabb történt. Általánosabban fogalmazva: a probléma az, hogy bár N bemenete egy kijelentésváltozó összes értéke, alkalmazásának eredménye mindig egy konkrét kijelentés, nem pedig egy kijelentésváltozó összes értéke.

Próbáljuk meg az N műveletet úgy módosítani, hogy nemcsak bemenetét, kimenetét is egy-egy kijelentésváltozó összes megengedett értéke alkossa! Kívánatos volna például, hogy a módosított N művelet $\phi(x)$-re való alkalmazásának eredménye ne csak $\phi(x)$ összes értékének együttes tagadása lehessen, hanem azon kijelentések összessége is, amelyeket úgy kaphatunk meg, hogy $\phi(x)$ összes értékére külön-külön alkalmazzuk az eredeti

[17] A kivételekről lásd a 15. lábjegyzetet.

tractatusi N-t. Mivel mindkét változatra szükségünk van, kézenfekvő, hogy eltérő jelölést vezessünk be rájuk. Azt, amelyik $\phi(x)$ összes értékét tagadja, N_x-szel jelöljük (ez egyfajta kvantor, éspedig negatív univerzális kvantor), azt pedig, amelyik az értékeket külön-külön tagadja, N_0-lal; végül az index nélküli N szimbólumot megtartjuk az eredeti tractatusi N művelet számára. (A módosított műveletek argumentuma továbbra is egy kijelentésváltozó összes értéke, ezért megtartjuk a felülvonásos jelölést.) Így a következő elemzésekhez jutunk:

$$\forall x\phi(x) = N_x(\overline{N_0(\overline{\phi(x)})})$$

– illetve

$$\exists x\phi(x) = N_0(\overline{N_x(\overline{\phi(x)})})$$

Mindkét konstrukcióban $\phi(x)$-ből indultunk ki. Az elsőben először az N_0 művelettel előállítottuk azt a kijelentésváltozót, amelynek értékei $\phi(x)$ értékeinek tagadásai; majd az utóbbi összes értékét együttesen tagadtuk az N_x művelettel. A másodikban először N_x-szel együttesen tagadtuk $\phi(x)$ összes értékét, majd a kapott kijelentést tagadtuk N_0 alkalmazásával.

A többváltozós esetekben is hatékonyan lehet alkalmazni a módosított N műveletet. Így például a vegyes kvantorelőfordulások alapeseteire a következő elemzést adhatjuk:

$$\exists x\forall y\phi(x,y) = N_0\left(\overline{N_x\left(\overline{N_y(\overline{N_0(\overline{\phi(x,y)})})}\right)}\right)$$

Ebben a konstrukcióban először N_0-lal képeztük azt a kijelentésváltozót, amelynek értékei $\phi(x,y)$ értékeinek tagadásai. Ezután az N_y művelettel tagadtunk minden egyes olyan kijelentésosztályt, amelyek elemei $\phi(x,y)$ egymástól csak y-ban különböző értékei (tehát a $\{\phi(a,a), \phi(a,b), \phi(a,c), \dots\}$, a $\{\phi(b,a), \phi(b,b), \phi(b,c), \dots\}$ stb. kijelentésosztályokra külön-külön alkalmaztuk az eredeti tractatusi N műveletet). Mindezek az együttes tagadások ismét egy kijelentésváltozó értékei. Ez a kijelentésváltozó felel meg a $\forall y\phi(x,y)$ nyitott formulának. Most e változóra alkalmaztuk az N_x műveletet, amely ezúttal már egyszerűen a változó összes értékének együttes tagadása volt. A végeredményt még egyszer tagadni kellett N_0 újbóli alkalmazásával, hogy megkapjuk a keresett kijelentést.

$$\begin{aligned}\forall x\exists y\phi(x,y) &= N_x\left(\overline{N_0\left(\overline{N_0(\overline{N_y(\overline{\phi(x,y)})})}\right)}\right)\\ &= N_x\left(\overline{N_y(\overline{\phi(x,y)})}\right)\end{aligned}$$

Itt is ugyanazokat a lépéseket hajtottuk végre, mint az imént, csak más sorrendben. Először az N_y műveletet alkalmaztuk a $\phi(x,y)$ kijelentésváltozóra a fenti konstrukcióhoz hasonló hatással; a különbség csak annyi, hogy ezúttal nem elemi kijelentések tagadásaival, hanem magukkal az elemi kijelentésekkel dolgoztunk. Az eredményre alkalmaztuk az N_0 műveletet. Egy kijelentésváltozót kaptunk, amelynek értékei az N_y alkalmazásakor keletkezett kijelentések tagadásai. Ez a kijelentésváltozó felel meg a $\exists y \phi(x, y)$ nyitott formulának. Ismét külön-külön tagadtuk az N_0 művelettel a kapott kijelentésváltozó összes értékét; majd az eredményként előállt újabb kijelentésváltozó összes értékét tagadtuk az N_x művelettel, és megkaptuk a keresett kijelentést. A konstrukcióban N_0 két egymás utáni alkalmazása természetesen kioltotta egymást, így a végeredmény némileg egyszerűsíthető volt.

Természetesen ezek a formulák csak akkor nyerik majd el szándékolt értelmüket, ha a bennük alkalmazott műveleteket pontos definícióval bevezetjük. Ehhez azonban további fogalmi előkészületekre van szükség.

Nevezzük a $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ n-változós kijelentésfüggvény két értékét i-ekvivalensnek, ha csak az x_i változó helyén különböznek! ($\phi(x_1, x_2, x_3)$ értékei közül például $\phi(a, b, c)$ 2-ekvivalens $\phi(a, c, c)$-vel, az utóbbi pedig 3-ekvivalens $\phi(a, c, b)$-vel.) A (nyilvánvalóan reflexív, szimmetrikus és tranzitív) i-ekvivalencia $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ értékeinek összességét i-ekvivalenciaosztályokra bontja. $N_{x_i}(\overline{\phi(x_1, \ldots, x_n)})$ egy $n-1$-változós kijelentésfüggvény, amelynek értékei a $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ kijelentésfüggvény egyes i-ekvivalenciaosztályaiba tartozó értékek együttes tagadásai. Jelölje mármost $Ekv_i(\overline{\phi(x_1, \ldots, x_n)})$ a $(\overline{\phi(x_1, \ldots, x_n)})$-beli i-ekvivalenciaosztályok összességét! Most már összes értékének megadásával meg tudjuk határozni az $N_{x_i}(\overline{\phi(x_1, \ldots, x_n)})$ kijelentésfüggvényt.

$$\left(\overline{N_{x_i}(\overline{\phi(x_1, \ldots, x_n)})}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{N(\bar{\xi}) : (\bar{\xi}) \in Ekv_i(\overline{\phi(x_1, \ldots, x_n)})\right\}$$

$n = 1$ esetén ez a meghatározás visszaadja az eredeti tractatusi N műveletet; $n = 2$ és $i = 2$ esetén pedig a fentebbi $N_y(\overline{\phi(x, y)})$-t kapjuk meg.

Hátra van még N_0 meghatározása. Ezt tetszőleges ξ kijelentésváltozóra alkalmazhatjuk:

$$(\overline{N_0(\bar{\xi})}) \stackrel{\text{def}}{=} \{N(p) : p \in (\bar{\xi})\}$$

Az N műveleten bevezetett módosítások megoldják ugyan a Fogelin által felvetett technikai problémákat, de ennek a megoldásnak ára van. Az N_x művelet mind szintaktikai, mind szemantikai értelemben lényegében kvantorként viselkedik, tehát le kell mondanunk arról, hogy a kvantifikációt valami elemibbre redukáljuk. Ezzel együtt arról is le kell mondanunk, hogy „[v]alamennyi kijelentés az elemi kijelentéseken végzett igazságműveletek eredménye" (5.3); legalábbis ha ragaszkodunk ahhoz, hogy igazságműveleten olyan műveletet értsünk, amelynek eredménye egy konkrét kijelentés. Egy gyengébb értelemben mégis nevezhetjük igazságműveletnek mind az N_x, mind az N_0 műveletet, hiszen eredményük kijelentésváltozó, amelynek minden egyes értéke igazságértékkel rendelkező kijelentés. A legsúlyosabb probléma viszont az, hogy a tractatusi kvantifikációt külső eszközökkel mentettük meg. Vitatható, hogy ezek az eszközök milyen mértékben idegenek a szöveg szellemétől; de a kulcsfontosságú hatos pont betűjének bizonyosan ellentmondanak.

3.6. Geach megoldási kísérlete

Peter Geach és Scott Soames ma többnyire definitívnek tekintett, egymástól csak részletekben különböző megoldásai közül Geach-ét ismertetjük, mert az némileg egyszerűbb és mert az övé a történeti elsőség. Geach szerint a wittgensteini N művelet alkalmas tetszőleges kvantoros szerkezet kifejezésére; de ehhez „szükségünk van (és ezzel Wittgenstein adós marad) egy explicit jelölésre, amellyel olyan kijelentések osztályaira utalhatunk, amelyekben az egyik összetevő cserélődik. $N(\ddot{x} : \phi(x))$-szel fogom jelölni azon kijelentések osztályának együttes tagadását, amelyeket úgy kapunk, hogy a $\phi(x)$ kijelentésfüggvényben (pontosabban az így jelölt kijelentésfüggvényben) konkrét nevekkel helyettesítjük a változót."[18]

Geach szerint tehát ez a jelölés alkalmas a kvantifikált kijelentések kifejezésére; éspedig a következőképpen:

$$\forall x\phi(x) = N\Big(\ddot{x} : N\{\phi(x)\}\Big)$$

$$\exists x\phi(x) = N\Big\{N(\ddot{x} : \phi(x))\Big\}$$

A többszörösen kvantifikált kijelentésekre pedig a következő példát adja:

$$\exists x\forall y\phi(x,y) = N\Big\{N\Big(\ddot{x} : N(\ddot{y} : N\{\phi(x,y)\})\Big)\Big\}$$

A példa alapján természetesen tetszőleges kvantoros szerkezetet lehet kódolni.[19]

[18] Geach [1981], 169.o.

[19] A jelöléseken árnyalatnyit módosítottam. Geach nem használ kapcsos zárójelet akkor, amikor az N műveletet egyetlen kijelentésre alkalmazza. Ezzel elvész a kijelentés és az általa alkotott egyelemű kijelentésosztály közötti különbség. Geach Fogelinnek adott viszontválaszában maga is reagál erre a – Fogelin által egyébként nem említett – hiányosságra, és védekezésképpen utal arra, hogy egy halmazelmélet konzisztenciáját nem befolyásolja, ha benne az atomokat azonosítjuk a belőlük alkotott szingletonokkal. Az ehhez hasonló nem-jólfundált halmazelméleti konstrukciók azonban teljesen idegenek a tractatusi rendszertől; semmi értelme, hogy ilyenekre támaszkodjunk, amíg semmi nem kényszerít rá.

Első pillantásra Geach formulái a 3.5. szakaszban bevezetett eszközöket alkalmazzák apró jelöléstechnikai módosítással; hiszen az utolsó formulában például az $N\{\phi(x,y)\}$ részkifejezés az N művelet alkalmazásának eredményeként áll elő, mégsem kijelentés, hanem kijelentésfüggvény, amelyben $\phi(x,y)$ mindkét változója továbbra is szabad. Az itt alkalmazott N tehát látszólag a 3.5. szakasz N_0 műveletével analóg. N következő alkalmazása pedig, amely megköti az y változót, a 3.5. szakasz N_y műveletével mutat analógiát: mindkettő egyetlen változót köt meg egy többváltozós kijelentésfüggvényben.

De Geach szűkszavú magyarázatából kiderül, hogy a látszat csal: „$N(\ddot{y} : N\{\phi(a,y)\})$ azt fejezi ki, hogy tagadunk minden olyan kijelentést, mint $N\{\phi(a,b)\}$; tehát azt, hogy állítjuk $\phi(a,b)$-t, bármi helyett álljon is b; így ekvivalens $\forall y\phi(a,y)$-nal. És ha azután a-t az x változóval helyettesítjük, az eredményt pedig beágyazzuk $N\{N(\ddot{x} : \dots)\}$-be, ezzel azt fejezzük ki, hogy tagadjuk azoknak a kijelentéseknek az együttes tagadását, amelyeket $\forall y\phi(a,y)$-ból a megváltoztatásával kapunk."[20]

Az $N\{\phi(x,y)\}$ és a $\phi(x,y)$ kifejezések tehát csak a felszíni struktúrában részei a formulának; a szintaktikai konstrukcióban nem szerepelnek. Valójában a $\phi(a,b)$ kijelentésből indulunk ki, és felváltva alkalmazunk két műveletet: a tractatusi N-et, amely egy kijelentésváltozó értékeiből állít elő kijelentést; valamint a $\ddot{x}$-szel jelölt absztrakciós műveletet, amely kijelentésből állítja elő egy kijelentésváltozó értékeit.

Az utóbbit Fogelin viszontválaszában a tractatusi rendszerbe való súlyos beavatkozásként értékeli.[21] Ez az értékelés azonban jogosulatlan. A kijelentésváltozó értékeit Wittgenstein szerint valamiképpen mindig rögzíteni kell; és Geach-nek teljesen igaza van abban, hogy a rögzítés mikéntjét túlzott eleganciával minősíti lényegtelennek (3.316sk.). Ráadásul egy név (vagy más kifejezés) változóval való helyettesítése a kijelentésváltozó előállításának kitüntetett módja (3.315). Geach tehát csupán elvégez egy Wittgenstein által elhanyagolt részfeladatot. Az, hogy a kijelentésváltozó ilyen módon való absztrakciójának műveletére bevezet egy jelölést, nem sérti jobban kimondhatósággal kapcsolatos tractatusi elveket, mint amikor Wittgenstein külön jelölést vezet be az együttes tagadás műveletére, ezzel olyasvalaminek a kimondására téve kísérletet, aminek csak megmutatkoznia szabadna.

Geach jelölésének fényében az bizonyul Fogelin hibájának, hogy a kvantifikált kijelentések előállításakor mindenáron a kvantoros prefixumot követő kijelentésfüggvényből

[20] Uo.

[21] Már a *Tractatus* 5.452 első mondatát kissé erőszakoltan idéző mottó is erre utal: „Mindig súlyos következményekkel kell járnia annak, ha a logika szimbolikájába új segédeszközt vezetünk be." Fogelin [1982], 124.o.

akart kiindulni; ebből azonban, mint az előző szakaszokban láttuk, néhány egyszerű kivételtől eltekintve csak az N művelet módosított változatával lehet előállítani a kvantifikált kijelentéseket. Ha viszont Geach receptjét követjük, és az előállítás során folyamatosan változtatjuk, mikor melyik kijelentésváltozóval dolgozunk, bármilyen kvantoros szerkezetet véges sok lépésben tudunk előállítani.

Hogy erről megbizonyosodhassunk, vizsgáljuk meg részletesen a Fogelinnél problematikus $\forall x\phi(x)$ előállítását! A $\phi(a)$ kijelentésből indulunk ki, ahol a tetszőleges, megfelelő grammatikai kategóriájú név; majd ennek mint egyértékű kijelentésváltozónak ez egyetlen értékére alkalmazzuk az N műveletet. Így az $N(\phi(a))$ kijelentéshez jutunk. Ebből absztraháljuk azután az $(\ddot{x} : N\{\phi(a)\})$ kijelentésváltozót. E változó lehetséges értékei az $N\{\phi(a)\}$, $N\{\phi(b)\}$, $N\{\phi(c)\}$ stb. kijelentések. Fogelin szerint ezek mindegyikét különkülön elő kell állítani, de ebben téved: az összes értéket egy csapásra előállítja az $\ddot{x}$ művelet egyetlen alkalmazása a mintaként választott $N\{\phi(a)\}$ – és alkalmasint bármely másik ilyen formájú – kijelentésből; és már csak N egy újabb alkalmazására van szükség, hogy megkapjuk a végeredményt. Nem vagyunk tehát kiszolgáltatva annak, hogy hány tárgy van, amely a megfelelő formával rendelkezik; nem kerülhetünk abba a helyzetbe, hogy végtelen sok feladatot kellene megoldanunk egymás után.

Az eddigiek alapján tehát úgy tűnik, hogy a tractatusi kvantifikáció problémája megnyugtató megoldást nyert. A következő szakaszban látni fogjuk, hogy ez nincs így.

3.7. További problémák és megoldási kísérletek

Látszólag ártalmatlan módon, a tartalom megváltoztatása nélkül átláthatóbbá és kevésbé félreérthetővé tehetjük Geach jelöléseit, ha explicitté tesszük, hogy az általa $\ddot{x}$-szel jelölt kijelentésváltozó-absztrakciós művelet alkalmazásával valóban egy név cserélődik változóra: $(\ddot{x} : \phi(x))$ helyett $(x/a : \phi(a))$-t írhatunk. A jelölés módosításával nem teszünk többet, mint hogy explicitté tesszük Geach instrukcióit az $\ddot{x}$ művelet alkalmazására. Megmutatjuk, hogy az átalakítás korántsem ártalmatlan; és ennek kapcsán rejtett paraméterekre mutatunk rá Geach jelölésében is.

Lássuk Geach kétváltozós példáját az új jelöléssel!

$$\exists x\forall y\phi(x,y) = N\Big(N\Big(x/a : N(y/b : N(\phi(a,b)))\Big)\Big)$$

Geach feltehetőleg azért nem tette explicitté a névhelyettesítést, mert a végeredmény szempontjából mindegy, milyen nevekből indulunk ki. Pontosabban: szinte mindegy. Arra azért vigyáznunk kell, hogy a kiinduláskor választott kijelentésben ne ugyanazt a nevet használjuk kétszer. Ha például $\phi(b,b)$-ból indulnánk ki, és – Geach instrukcióit követve – a megfelelő lépésnél b-t y-nal helyettesítenénk, nem maradna mit x-szel helyettesíteni, és háromszoros tagadást követően a nemkívánatos $\forall y \phi(y,y)$ eredményhez jutnánk.

De mi szavatolja, hogy van egyáltalán két különböző individuumnév? Ismét fel kell idéznünk: nem tudhatjuk, hogy egy adott formájú tárgyból mennyi van, és így az adott grammatikai formájú nevek számára vonatkozóan sem tudhatunk semmi többet annál, mint hogy ha tudunk velük kijelentést tenni, akkor az adott név-, illetve tárgy-kategória nem lehet üres. Ameddig lehetséges, el kell kerülnünk, hogy a nevek számosságát bármilyen értelemben kihasználjuk.

A nevek változókkal való helyettesítése még egy ponton kudarcba fulladhat. Legyenek a behelyettesíthető nevek a korábbi szakaszokhoz hasonlóan a, b, c stb., és induljunk ki az $N(\{\phi(a,b)\}$ kijelentésből! Az első, y/b behelyettesítés után, mint láttuk, az $(y/b : N\{\phi(a,b)\})$ – vagy Geach jelölésével: $(\ddot{y} : N\{\phi(a,y)\})$ – kijelentésváltozóhoz jutunk, melynek értékei az $N\{\phi(a,a)\}$, $N\{\phi(a,b)\}$, $N\{\phi(a,c)\}$ stb. kijelentések. Képezzük most ezek együttes tagadását, majd végezzük el az x/a behelyettesítést a kapott

$$N\Big\{N\{\phi(a,a)\}, N\{\phi(a,b)\}, N\{\phi(a,c)\}, \dots\Big\}$$

kijelentésen! Az eredmény a hibás

$$N\Big\{N\{\phi(x,x)\}, N\{\phi(x,b)\}, N\{\phi(x,c)\}, \dots\Big\}$$

kijelentésváltozó lesz; hibás, mert egy nemkívánatos helyen is találtunk a-előfordulást.

Mindebből az következik, hogy ha pontosan követjük Geach utasításait, anomáliák keletkeznek. Nemcsak azt kellene ugyanis számon tartanunk, hogy melyik nevet helyettesítjük éppen változóval (vagy ami ezzel egyenértékű: más nevekkel), hanem azt is, hogy milyen előfordulási helyeken tesszük ezt. És nem csak arról van szó, hogy a $\phi(x,y)$ kijelentésfüggvény hányadik változójával dolgozunk éppen. Abban a $\phi(a,b)$ kijelentés ugyanis, amellyel egy adott ponton dolgoznunk kell, az a, illetve a b nevek számos helyen előfordulhatnak; ezeknek az előfordulásoknak pedig egy részén el kell végezni az épp soron következő behelyettesítést, máshol viszont nem. Az előbbi előfordulásokat képviseli az x, illetve az y változó.

Ezek az információk rejtve maradnak a Geach által bevezetett jelölésben, pedig annak alkalmazásaiban kulcsszerepet játszanak. A $\phi(x,y)$ jelölés használatával Geach megelőlegezi, hogy már sikerült beazonosítani mindazokat a helyeket, amelyeken később a behelyettesítéseket el fogjuk végezni. Hogy miképpen történt a beazonosítás és hogy melyek is ezek a helyek, arról a $\phi(x, y)$ jelsorozat önmagában még semmit nem árul el. Ha egyáltalán lehetséges ezeket az információkat valahogy számon tartani, akkor explicitté is lehet tenni őket, és ebben az esetben Geach jelölését hiányosnak, de alapjában helyesnek mondhatjuk. Ha nem lehetséges, akkor Geach jelölése hibás.

A fenti megfontolások alapján a geach-i jelölés egy harmadik, az előzőeknél pontosabb változatához juthatunk a következőképpen. A művelet általános formája: $x/\langle h, h', \ldots\rangle$ – ahol h, h' stb. természetes számok. Ha a műveletet alkalmazzuk valamely ϕ kijelentésre, az eredmény az a $\phi(x)$ kijelentésfüggvény lesz, amelyet úgy nyerünk, hogy ϕ minden elemi részkijelentésében a h-adik, a h'-edik stb. individuumnevet x-szel helyettesítjük.[22] A példák ezúttal beszédesebbek a szabálynál: $(x/\langle 1\rangle : aRb)$ az xRb kijelentésfüggvényt adja ki; $(x/\langle 2\rangle : aRb)$ az aRx-et; végül $(x/\langle 1\rangle : N\{N\{aRb\}, N\{Pa\}\})$ a klasszikus elsőrendű jelölés szerinti xRb & Px kijelentésfüggvényt.

Állítsunk elő az új kijelentésváltozó-absztrakciós művelettel néhány kvantifikált kijelentést! Az első:

$$\exists x \forall y xRy = N\Big\{N\Big(x/\langle 1\rangle : N(y/\langle 2\rangle : N\{aRb\})\Big)\Big\}$$

Az aRb elemi kijelentésből indulunk ki (bár kiindulhatnánk éppen aRa-ból is). Ennek tagadása $N\{aRb\}$. A következő lépés az $\sim aRy$ tractatusi megfelelőjének előállítása az $y/\langle 2\rangle$ absztrakcióval. A kapott kijelentésváltozó összes értékét tagadjuk; így $\forall y aRy$ fordításához jutunk. Most a $x/\langle 1\rangle$ absztrakcióval lépünk tovább $\forall y xRy$ megfelelőjéhez. Ennek összes értékét tagadjuk az N újabb alkalmazásával; most járunk $\sim \exists x \forall y xRy$-nél. Végül N utolsó alkalmazása kiadja a kívánt végeredményt.

A második:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y xRy &= N\Big(x/\langle 1\rangle : N\Big\{N\{N(y/\langle 2\rangle : aRb)\}\Big\}\Big) \\ &= N(x/\langle 1\rangle : N(y/\langle 2\rangle : aRb)) \end{aligned}$$

Itt ugyanazokat a műveleteket más sorrendben végrehajtva aRb-ből előbb az $y/\langle 2\rangle$ absztrakcióval az aRy kijelentésváltozóhoz jutunk, majd az utóbbi összes értékének tagadásával és az eredmény újbóli tagadásával megkapjuk $\exists y aRy$ fordítását. Ezt még egyszer tagadjuk, majd az $x/\langle 1\rangle$ absztrakcióval előállítjuk az $\sim \exists y xRy$-nak megfelelő kijelentésváltozót. E változó összes értékének tagadása a keresett kijelentés. Mivel kétszer

[22] Az elemi kijelentésekben szereplő nevek helyét akkor is egyértelműen megcímkézhetjük természetes számmal vagy rendszámmal, ha nem csak véges argumentumú relációs kijelentéseket engedünk meg elemi kijelentés gyanánt. Az elemi kijelentés nevek láncolata (4.22), tehát benne minden névnek meghatározott helye van, amelyet sorszámmal láthatunk el. (Legalábbis ha feltételezzük, hogy a láncnak van kezdő láncszeme, és nincsenek benne elágazások. Ha nem így van, akkor a címkézés valamivel nehézkesebb, de még mindig nem lehetetlen.)

alkalmaztuk egymás után egytagú argumentumra – tehát egyszerű tagadásként – az N műveletet, e két alkalmazás kioltja egymást. Ez tesz lehetővé némi egyszerűsítést a végeredményen.

Végül egy harmadik példa:

$$\forall x x R x = N(x/\langle 1,2\rangle : N\{aRb\})$$

Ezúttal is aRb-ből indulunk ki. Ezt tagadjuk, majd az $x/\langle 1,2\rangle$ absztrakcióval előállítjuk $\sim xRx$ tractatusi megfelelőjét. E kijelentésváltozó összes értékének tagadása lesz a keresett kijelentés.

A példákból jól látható, hogy elemi kijelentéseken jól vizsgázik az immár másodjára módosított Geach-i jelölés; ráadásul most már valóban mindegy, hogy a kiinduló kijelentésekben mely individuumneveket használtuk. Az összetett kijelentések azonban újabb nehézséget támasztanak.

Hogy tudnánk például előállítani a

$$\forall x(aRx \supset Px)$$

kijelentést? Természetesen mindhárom alábbi jelölt alkalmatlan:

$$N\Big(x/\langle 1\rangle : N\Big\{N\{N\{N\{aRb\}, Pa\}\}\Big\}\Big),$$
$$N\Big(x/\langle 2\rangle : N\Big\{N\{N\{N\{aRb\}, Pa\}\}\Big\}\Big),$$
$$N\Big(x/\langle 1,2\rangle : N\Big\{N\{N\{N\{aRb\}, Pa\}\}\Big\}\Big)$$

– hiszen ezek klasszikus elsőrendű nyelvi fordításai rendre a

$$\forall x(xRb \supset Px),$$
$$\forall x(aRx \supset Pa),$$
$$\forall x(xRx \supset Px)$$

formulák lesznek. A kijelentés előállításához olyan absztrakciós operátorra van szükségünk, amely $aRb \supset Pa$ tractatusi megfelelőjéből képes előállítani a klasszikus elsőrendű $aRx \supset Px$-nek megfelelő kijelentésfüggvényt.

Ezt a célt fogja szolgálni a geach-i jelölés következő módosítása. Eddig csak azt jeleztük, melyik grammatikai helyeken kívánjuk a név-előfordulásokat változókkal helyettesíteni; ezentúl azon elemi kijelentések mintáját is megadjuk, amelyekben a helyettesítéseket el akarjuk végezni. Ez lehet egy alapminta a szó tractatusi értelmében – tehát olyan kijelentésváltozó, amelyben minden összetevőt változó képvisel (3.315) –; de a helyettesítések körét korlátozhatjuk is azzal, hogy a mintában egy vagy több helyen egy konkrét tulajdonnevet szerepeltetünk. A művelet általános formája

$$x/\langle k_1 : \phi_1(u_1, \ldots, u_n), k_2 : \phi_2(v_1, \ldots, v_m), \ldots \rangle$$

lesz. Itt u_1, u_2, v_1 stb. változók, és a $\phi_1(u_1, \ldots, u_n)$, $\phi_2(v_1, \ldots, v_m)$ stb. kijelentésvfüggvényeket elemi kijelentésekből nyertük a szokásos módon, egyes név-előfordulásokat változóval helyettesítve. A műveletet a következőképpen alkalmazzuk valamely ψ kijelentésre: ψ minden olyan elemi részkijelentésében, amely értéke a $\phi_1(u_1, \ldots, u_n)$, $\phi_2(v_1, \ldots, v_m)$ stb. kijelentésvfüggvények valamelyikének, rendre a k_1-edik, a k_2-edik stb. individuumnevet változóra cseréljük.

A példák ismét beszédesebbek az általános szabálynál. Ha például az $x/\langle 1 : uRv\rangle$ behelyettesítést alkalmazzuk egy ϕ kijelentésre, akkor kijelentésváltozót kapunk, amely úgy keletkezik ϕ-ből, hogy az összes uRv formájú részkijelentésében a mintabeli u helyén szereplő nevet x-szel helyettesítjük. Ha pedig az $x/\langle 2 : uRv, 1 : Pu\rangle$ behelyettesítést alkalmazzuk ϕ-re, akkor azt a kijelentésváltozót kapjuk, amely úgy keletkezik ϕ-ből, hogy egyrészt az összes uRv részkijelentésében a mintabeli v helyén szereplő nevet x-szel helyettesítjük; másrészt a Pu formájú részkijelentésekben a mintabeli u helyén szereplő nevet x-szel helyettesítjük.

Az újabb eszköz birtokában már meg tudjuk adni az iménti elsőrendű formula korrekt tractatusi fordítását is:

$$\begin{gathered}\forall x(aRx \supset Px) = \\ N\Big(x/\langle 2 : aRu, 1 : Pu\rangle : N\Big\{N\{N\{N\{aRb\}, Pa\}\}\Big\}\Big) \\ = N\Big(x/\langle 2 : aRu, 1 : Pu\rangle : N\{N\{aRb\}, Pa\}\Big)\end{gathered}$$

Kövessük végig pontról-pontra a konstrukciót! Először az $N\{N\{N\{aRb\}, Pa\}\}$ kijelentést állítjuk elő; ez a standard elsőrendű $aRb \supset Pa$ formula tractatusi fordítása. Az ebből képzett egyelemű kijelentésosztályra alkalmazzuk az N műveletet; a kapott $N\{N\{N\{N\{aRb\}, Pa\}\}\}$ a standard jelölés szerinti $\sim(aRb \supset Pa)$. Ezután x megfelelő helyekre való behelyettesítésével megkapjuk a $\sim(xRb \supset Px)$ nyitott formula fordítását. Végül ezt tagadjuk összes értékére; az eredmény $\forall x \sim\sim(aRx \supset Px)$, vagy a kettős negáció törlésével: $\forall x(aRx \supset Px)$ tractatusi megfelelője lesz. Az N művelet halmozott egyargumentumú alkalmazásai törölhető kettős tagadást alkotnak; így tudjuk némileg egyszerűsíteni a végeredményt.

Legújabb változóabsztrakciós eszközünk hatékonyságát mutatja az alábbi példa is:

$$\forall x \exists y (xRy \;\&\; yQx) =$$

$$N\Big(x/\langle 1 : uRv, 2 : uQv\rangle : N\Big\{N\{N(y/\langle 2 : uRv, 1 : uQu\rangle :$$

$$N\{N\{aRb\}, N\{aQb\}\})\}\Big\}\Big)$$

$$= N\Big(x/\langle 1 : uRv, 2 : uQv\rangle : N\Big(y/\langle 2 : uRv, 1 : uQv\rangle : N\{N\{aRb\}, N\{aQb\}\}\Big)\Big)$$

Ezúttal az $N\{N\{aRb\}, N\{aQb\}\}$ kijelentésből indulunk ki; ez $aRb \;\&\; aQb$ tractatusi fordítása. Erre alkalmazzuk az $y/\langle 2 : uRv, 1 : uQv\rangle$ absztrakciót, és megkapjuk a $aRy \;\&\; yQb$-nek megfelelő tractatusi kijelentésfüggvényt. Alkalmazzuk erre, majd az eredményből képzett egyelemű osztályra még egyszer az N operátort; a kapott kijelentés a $\exists y(aRy \;\&\; yQb)$ fordítása. Az ebből képzett egyelemű osztályra alkalmazzuk az N műveletet; majd az $x/\langle 2 : uRv, 1 : uQv\rangle$ absztrakcióval megkapjuk a $\sim \exists y(xRy \;\&\; yQx)$ kijelentésfüggvény tractatusi megfelelőjét. Végül N utolsó alkalmazása eljuttat a kívánt végeredményhez. Mivel N-t kétszer egymás után alkalmaztuk egyetlen argumentumra, a két alkalmazás kioltja egymást; ez teszi lehetővé az egyszerűsítést.

De nem nehéz észrevenni a korlátokat sem. Mire mennénk például a

$$\forall x \exists y (xRy \;\&\; yRx)$$

kijelentéssel? Lássuk, meddig tudunk eljutni a szerkesztésben! Induljunk el $aRb \;\&\; bRa$ tractatusi megfelelőjéből, az $N\{N\{aRb\}, N\{bRa\}\}$ kijelentésből! A nevek megválasztásának ezúttal fontos szerepe van; így tudjuk sikerrel alkalmazni az $y/\langle 2 : aRu, 1 : uRa\rangle$ absztrakciót az $aRy \;\&\; yRa$ kijelentésfüggvény tractatusi megfelelőjének előállítására. Erre alkalmazzuk az N műveletet; majd még egyszer az eredményből képzett egyelemű osztályra! Így megkaptuk $\exists y(aRy \;\&\; yRa)$ tractatusi megfelelőjét:

$$N\Big\{N\Big(y/\langle 2 : aRu, 1 : uRa\rangle : N\{N\{aRb\}, N\{bRa\}\}\Big)\Big\}$$

Itt azonban megáll a tudományunk. Most kellene a megfelelő helyeken x-et helyettesíteni a helyére a kapott kijelentés elemi részkijelentéseibe; éspedig hol az első, hol a második argumentumhelyen. A kínálkozó absztrakciós művelet tehát $x/\langle 1 : aRu, 2 : uRa\rangle$ lenne. A probléma az, hogy aRa kétszer is szerepel a konstrukcióban; egyszer aRy, másszor yRa értékeként. Ráadásul x-et az egyik esetben az első, a másik esetben a második argumentumhelyre kellene helyettesítenünk. Ha egyik vagy mindkét esetben hibás helyettesítést végzünk, a végeredmény hibás lesz. A jelenlegi eszközeinkkel azonban nem tudjuk megkülönböztetni ezt a két előfordulást. Az említett $x/\langle 1 : aRu, 2 : uRa\rangle$ például aRa mindkét előfordulásában mindkét helyre behelyettesítené x-et.

Milyen irányban lehetne még tovább fejleszteni a már így is többszörösen továbbfejlesztett geach-i változóabsztrakciós műveletet, hogy ezzel a kijelentésszerkezettel is elboldoguljunk? Mi különbözteti meg egyáltalán egymástól aRa két előfordulását?

A sorrendre természetesen nem hivatkozhatunk. Míg az aRb & bRa különbözik a vele ekvivalens bRa & aRb-től, tehát van értelme benne a első, illetve második előfordulásáról beszélni, addig $N\{N\{aRb\}, N\{bRa\}\}$ és $N\{N\{bRa\}, N\{aRb\}\}$ ugyanaz, hiszen egy halmaz elemeinek nincs sorrendje. Voltaképpen ezen a ponton követi el mind Fogelin, mind Geach a döntő hibát: nem veszik észre, hogy az összetett kijelentések e tekintetben nem kezelhetők az elemiekkel analóg módon. Ebben a tekintetben lényegesen különbözik Wittgenstein kijelentésfogalma a modern logika Fregétől és Russelltől örökölt analóg fogalmaitól; és a wittgensteini kijelentésfüggvény sem analóg a russellivel. Mivel N argumentumainak nincs sorrendje, az összetett kijelentések konponensei nem lokalizálhatók a megszokott módon.

Az egymásba ágyazott N műveletek szerinti mélység sem alkalmas az előfordulások megkülönböztetésére. $N\{N(y/\langle 2 : aRu, 1 : uRa\rangle : N\{N\{aRb\}, N\{bRa\}\})\}$-ban aRa mindkét előfordulása a negyedik beágyazási szinten van (tehát az N művelet argumentumában szereplő N művelet argumentumában szereplő N művelet argumentumában szereplő N művelet argumentumában szerepel).

Még egy szempont adódik a szintaktikai megkülönböztetésre: az, hogy az adott kijelentés megkülönböztetendő előfordulása milyen más kijelentések környezetében szerepel az adott konstrukcióban. Az ominózus $N\{N(y/\langle 2 : aRu, 1 : uRa\rangle : N\{N\{aRb\}, N\{bRa\}\})\}$ kijelentésben például aRa egyszer az aRb, aRc stb. kijelentésekkel, másszor az bRa, cRa stb. kijelentésekkel szerepel egy társaságban. Ez persze nem azt jelenti, hogy a konstrukcióban izolálhatnánk az $\{aRa, aRb, aRc, \ldots\}$ és a $\{aRa, bRa, cRa, \ldots\}$ kijelentésosztályokat. Ennek ellenére ki lehetne dolgozni az előfordulások megkülönböztetésének egy, az ilyen értelemben vett környezetre érzékeny módszerét. Ezen az úton azonban már nem indulunk el; és erre jó okunk van. A környezetérzékenység ugyanis azt jelentené, hogy a konstrukció minden egyes lépésénél tekintettel kellene lennünk arra, hogy korábban milyen lépéseket tettünk már meg. A kvantifikált kijelentések előállításának szabályait tehát nem lehetne teljes általánosságban megadni; mindig ad hoc megoldásokra kényszerülnénk. (Vegyük észre, hogy már az $\exists y(aRy$ & $yRa)$ kijelentést is csak úgy tudtuk előállítani, hogy alkalmasan választottuk meg a kiinduló elemi kijelentésekben szereplő individuumneveket; korábbi konstrukcióinkban ilyen ügyeskedésekre nem volt szükség.)

A geach-i változóabsztrakciós művelet további, egyre erőltetettebb módosítási kísérletei helyett tehát inkább azt a – talán a szükségesnél óvatosabb – negatív konklúziót vonjuk le, hogy ezen az úton nem látszik megoldhatónak az elsőrendű kvantifikáció kifejezése a tractatusi logikai szimbolika eszközeivel.

3.8. Kitérő: az eltérő értékelés tractatusi követelménye

Negatív konklúziónkkal szemben felmerül egy ellenvetés. A $\forall x \exists y(xRy \,\&\, yRx)$ kijelentés előállításában azért akadtunk el, mert nem tudtunk különbséget tenni aRa két előfordulása között, amelyek közül az egyikben behelyettesítéseket kellett végrehajtanunk, a másikban viszont nem. Az aRa részkijelentés azonban nem is szerepelne a részkijelentések között, ha nem döntöttünk volna úgy a fejezet elején, hogy az egyszerűség kedvéért nem a tractatusi változóhasználati megszorítások szerinti tractatusi kvantifikációt, hanem a változóhasználati megszorításokat mellőző, de a wittgensteini kvantormeghatározás szerinti kvantifikációt próbáljuk meg kifejezni a tractatusi logikai szimbolika eszközeivel. Úgy tűnhet, hogy a látszólagos egyszerűsítés visszaüt. Ha megkövetelnénk, hogy a közös hatókörrel kvantifikált változók értéke különbözzön, a geach-i változóabsztrakciós művelet utolsó módosított változata mégiscsak alkalmas lenne a $\forall x \exists y(xRy \,\&\, yRx)$ kijelentés tractatusi változatának előállítására. Megmutatjuk, hogy ez nincs így; az eltérő értékelés követelménye nemhogy megoldaná a helyzetet, de újabb nehézségeket támaszt.

Az ellenvetésnek megfelelően módosítsuk a kijelentésfüggvény fogalmát a következőképpen: valamely ϕ kijelentés akkor és csak akkor értéke a $\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ kijelentésfüggvénynek, ha

1. ϕ úgy keletkezik $\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$-ből, hogy a változóelőfordulásokat nevekkel helyettesítjük;
2. ugyanazon változóelőfordulások helyére mindig ugyanazt a nevet helyettesítjük;
3. különböző változók előfordulásait nem helyettesítjük egyazon névvel;
4. nem használunk olyan neveket változóhelyettesítésre, amelyek $\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$-ban is szerepelnek.

Kíséreljük meg most még egyszer az

$$x/\langle k_1 : \phi_1(u_1, \ldots, u_n), k_2 : \phi_2(v_1, \ldots, v_m), \ldots\rangle$$

absztrakciós művelettel előállítani a problémás $\forall x \exists y(xRy \ \& \ yRx)$ kijelentés tractatusi változatát! Mivel a konstrukció nagyon nehezen követhető, éljünk azzal a további kényelmi megkötéssel, hogy az individuumtartomány háromelemű, vagyis mindössze három tractatusi individuumnév van: a, b és c. Szintén a jobb követhetőség kedvéért hibrid jelölést fogunk használni: a konstrukcióban gyakran előforduló $N\{N\{\phi\}, N\{\psi\}\}$ helyett mindvégig annak klasszikus elsőrendű megfelelőjét, $\phi \ \& \ \psi$-t írjuk.

Ismét $aRb \ \& \ bRa$-ből indulunk ki, és erre alkalmazzuk az $y/\langle 2 : aRu, 1 : uRa\rangle$ absztrakciót. Az eredményként kapott $aRy \ \& \ yRa$ kijelentésfüggvény értékeinek osztálya az imént bevezetett megszorítás szerint: $\{aRb \ \& \ bRa, aRb \ \& \ bRa\}$. Az értékek közül tehát hiányzik $aRa \ \& \ aRa$, hiszen a-t nem lehet y helyére helyettesíteni. Most erre a kijelentésváltozóra, majd az eredményre még egyszer alkalmazzuk az N műveletet. Az eredmény a $(aRb \ \& \ bRa) \vee (aRc \ \& \ cRa)$ klasszikus elsőrendű formula tractatusi megfelelője, $N\{N\{aRb \ \& \ bRa, aRc \ \& \ cRa\}\}$ lesz. Most erre a kijelentésre alkalmazzuk az $x/\langle 1 : aRu, 2 : uRa\rangle$ absztrakciót. Az eredmény az $N\{N\{xRb \ \& \ bRx, xRc \ \& \ cRx\}\}$ kijelentésfüggvény, a klasszikus elsőrendű $(xRb \ \& \ bRx) \vee (xRc \ \& \ cRx)$ tractatusi megfelelője. Ennek egyetlen értéke a megszorítás szerint: $N\{N\{aRb \ \& \ bRa, aRc \ \& \ cRa\}\}$, hiszen sem b-t, sem c-t nem lehet x helyére helyettesíteni. Erre kellene most alkalmaznunk kétszer egymás után az N műveletet; ez azonban csak kettős tagadás lenne, tehát elhagyhatjuk.

A konstrukcióval közelébe sem tudtunk jutni a keresett kijelentésnek, amely a klasszikus elsőrendű

$$((aRb \ \& \ bRa) \vee (aRc \ \& \ cRa)) \ \& \ ((bRa \ \& \ aRb) \vee (bRc \ \& \ cRb)) \ \&$$

$$((cRa \ \& \ aRc) \vee (cRb \ \& \ bRc))$$

formula tractatusi megfelelője lenne, vagyis a hibrid jelöléssel

$$N\{N\{aRb \ \& \ bRa, aRc \ \& \ cRa\}, N\{bRa \ \& \ aRb, bRc \ \& \ cRb\},$$

$$N\{cRa \ \& \ aRc, cRb \ \& \ bRc\}\}$$

A példából jól látszik, hogy az eltérő értékelések követelménye nemhogy megkönnyítené, de lényegesen megnehezíti a dolgunkat. A többkvantoros szerkezeteket az előző fejezetben bevezetett absztrakciós műveletekkel nem lehet rekonstruálni a tractatusi szimbolikában. A nehézség legfeljebb úgy hidalható át, ha lemondunk arról, hogy kijelentésfüggvényekre hivatkozzunk a kvantifikált kijelentések konstrukciójában, tehát lemondunk a kvantoroknak a 3.2. szakaszban bevezetett tractatusi definíciójáról. Ez azonban végképp túllépné az amúgy is terjedelmes jelen fejezet kereteit.

3.9. A tractatusi kvantifikáció egy kirívóan hibás kezelése

Egy néhány évvel ezelőtti tanulmányomban kísérletet tettem a korai wittgensteini logikai szimbolika modern eszközökkel történő rekonstrukciójára.[23] A rekonstruált rendszert összevetettem a klasszikus elsőrendű nyelvekkel,[24] és arra a megállapításra jutottam, hogy kifejezőerő szempontjából gazdagabb azoknál. A megállapítást tetszőleges elsőrendű nyelv formuláinak tractatusi fordítása támasztotta alá (262sk.o.). A fordításba azonban több hiba is csúszott:

1. a kifejezések jelölettartó fordítása csak súlyos megszorításokkal volt biztosítható;

2. a kvantifikált formulák fordítása ettől függetlenül sem volt igazságfeltétel-tartó.

A következőkben elsősorban a második hibával foglalkozunk. Az első a jelen kontextusban csak annyiban érdekes, amennyiben a másodikkal összefügg; de ezeket az összefüggéseket érintenünk kell.

A fordítás mindenekelőtt azt feltételezi, hogy a tanulmányban $\mathbf{L_{kl}}$-lel jelölt forrásnyelv egy n-argumentumú formulájának fordítása mögé n darab változó vagy névkonstans fordítását írva az $\mathbf{L_{tr}}$-rel jelölt célnyelv elemi kijelentését kapjuk. Fel kell tehát tennünk, hogy a célnyelvben vannak individuumnévként és predikátumként viselkedő kifejezések; éspedig a forrásnyelvi kifejezések sikeres fordításához elegendő számban. Ez a feltevés önmagában még elfogadható; ha nem teljesülne, hiába adnánk meg fordítást, az nem segítene a két nyelv kifejezőerejének összehasonlításában.

A tanulmány nem specifikálja, hogy pontosan melyik klasszikus elsőrendű nyelvet is használja a fordítás forrásnyelveként. $\mathbf{L_{kl}}$ bevezetésekor még számosságuk tekintetében sem specifikálja sem a névkonstansok, sem a predikátumok osztályát. A fordítással szemben viszont olyan követelményeket támaszt, amelyek egy maximális elsőrendű nyelv összes individuumának fordítását is lehetővé teszik (olyan nyelvét„ amelyben mind névkonstansból, mind predikátumból megszámlálhatóan végtelen sok van): „A fordítás előkészítéseképp [...] három diszjunkt, egyenként $\aleph_0$ számosságú osztályt kell kiemelnünk a tractatusi logikai nyelv egyszerű neveinek $\mathtt{N}$ osztályából [...Ezekbe] kerülnek rendre a klasszikus predikátumlogika névkonstansainak, változóinak és predikátumainak fordításai; a fordítás tehát minden nem-logikai kifejezést névvé alakít." (262.o.) A

[23] Mekis [2001b]. A továbbiakban a főszövegben, zárójelbe tett oldalszámokkal utalok a tanulmányra.

[24] Éspedig, bár a tanulmány ezt elmulasztotta jelezni, a névfunktormentes elsőrendű nyelvekkel.a 4.4. szakaszban részletesen tárgyalni fogjuk a névfunktorok problémáját a tractatusi nyelvben.

fordítás leírásából nem derül ugyan ki, hogy két $\mathbf{L_{kl}}$-beli névkonstansnak lehet-e ugyanaz a fordítása vagy sem, a követelményből sejthető, hogy nem lehet; és természetesen ugyanez érvényes a változókra és a predikátumokra is.

Mivel a tractatusi nevek jelölete rögzített, a fordítással egyben a forrásnyelv egy konkrét interpretációja és értékelése mellett is elkötelezzük magunkat. A tárgyalási univerzumot mindazok a tractatusi tárgyak alkotják, amelyek nevének grammatikai formája megegyezik a forrásnyelv individuumterminusainak fordítására használt nevekével. Ez a tartomány feltevésünkből következően végtelen. Ez az elkötelezettség a forrásnyelvben nem volt meg; tehát csak akkor érdemes élni vele, ha elkerülhetetlen. Mivel $\mathbf{L_{tr}}$-ben minden tárgynak pontosan egy neve van, további kényelmetlen előfeltevésként adódik, hogy bármely két $\mathbf{L_{kl}}$-beli individuumterminus extenziójának különbözőnek kell lennie. Összességében megállapíthatjuk: a tanulmány elgondolásai szerinti fordítás mind $\mathbf{L_{kl}}$ interpretációjával és értékelésével, mind $\mathbf{L_{tr}}$ struktúrájával és kifejezéseinek számosságával kapcsolatban olyan elkötelezettségekkel jár, amelyek súlyosan korlátozzák a fordítás általánosságát.

A továbbiakban ettől a nehézségtől eltekintünk, mert a következő probléma független tőle. Hogy a függetlenséget nyilvánvalóvá tegyük, nem a teljes $\mathbf{L_{kl}}$ fordításával fogunk foglalkozni, hanem csak egy olyan töredékével, amelyben van legalább egy egy egyargumentumú és egy kétargumentumú predikátum, valamint legalább két változó. Így nem kell feltételeznünk, hogy a kvantifikációs tartomány végtelen. Példáink megszerkesztésében ennél is tovább megyünk, és kételemű kvantifikációs tartománnyal fogunk dolgozni. Ez nem megy az általánosság rovására; a példa tetszőlegesen nagy kvantifikációs tartományra általánosítható.

$\mathbf{L_{kl}}$ valamely $\forall x\phi$ formájú formulájának tractatusi változatát a tanulmányban a

$$(\forall x\phi)^\circ = N\Big\{N\{(\phi^\circ)^{a/x^\circ}\} : a \in \mathtt{N}, (A^\circ)^{x^\circ/a} \in \mathbf{S}\Big\}$$

fordítási szabály adta meg.[25] F° jelöli az $\mathbf{L_{kl}}$ nyelv F kifejezésének fordítását a tractatusi logikai szimbolikára; N pedig az együttes tagadás tractatusi művelete. $\mathtt{N}$ a tractatusi nevek osztálya; $\mathbf{S}$ pedig a tractatusi kijelentéseké. $F^{G/H}$-vel jelöljük azt a kifejezést, amelyet F-ből H összes (szabad) előfordulásának G-re cserélésével kapunk. A szabályt átláthatóbb formára hozhatjuk, ha az összes név $\mathtt{N}$ osztálya helyett azoknak a neveknek sz osztályára utalunk, amelyekre $\mathbf{L_{kl}}$ individuumterminusait fordítjuk. $\mathtt{N_{ind}}$-del jelöljük ezt az osztályt, amely tehát pontosan azokat a tractatusi neveket tartalmazza, amelyeket x° helyére helyettesítve értelmes kijelentést kapunk. A szabály átláthatóbb változata

[25] I.m. 263.o.

tehát:

$$(\forall x\phi)^\circ = N\Big\{N\{(\phi^\circ)^{a/x^\circ}\} : a \in \mathtt{N_{ind}}\Big\}$$

A szabály értelmében tetszőleges univerzálisan kvantifikált formula fordítását a tanulmányban ismertetett $\mathbf{L_{tr}}$ nyelvben a következőképpen kapjuk meg:

1. a kvantor hatókörében szereplő formulát lefordítjuk a tractatusi szimbolikára;

2. képezzük az összes olyan kijelentést, amelyben a kvantifikált változó tractatusi fordításának összes előfordulását egy vele megegyező grammatikai formájú névvel helyettesítjük;

3. előállítjuk e kijelentések együttes tagadásának tagadását.

Az utóbbi lesz az elsőrendű formula $\mathbf{L_{tr}}$-fordítása. Az egzisztenciálisan kvantifikált formulákat természetesen a következő, az iméntivel analóg szabály fordítja:

$$(\exists x\phi)^\circ = N\Big\{N\{(\phi^\circ)^{a/x^\circ} : a \in \mathtt{N_{ind}}\}\Big\}$$

A szabályok szemléltetésére és a hiba bemutatására előállítjuk néhány elsőrendű formula tractatusi fordítását. Az egyszerűség kedvért feltételezzük, hogy a kvantifikációs tartomány mindössze kételemű, $\mathbf{L_{tr}}$-ben tehát mindössze két individuumnév áll rendelkezésre: $\mathtt{N_{ind}} = \{a_1, a_2\}$. Legyen továbbá $x^\circ = a_1$ és $y^\circ = a_2$; a többi változót nem vesszük bele a fordításba. Feltételezzük továbbá, hogy U két eleme $\mathbf{L_{kl}}$-ben is megnevezhető individuumkonstanssal. Fordításunkat az áttekinthetőség kedvéért vissza fogjuk fordítani $\mathbf{L_{kl}}$ ismerősebb szimbolikájára. A viszontirányú fordítást * jelöli.[26] Az alábbi triviális szabályokat fogjuk követni:

1. Ha P n-argumentumú predikátum $\mathbf{L_{kl}}$-ben, akkor $(P^\circ)^* = P$;

2. Ha x $\mathbf{L_{kl}}$-beli változó, akkor $(x^\circ)^*$ vele egyező jelöletű individuumkonstans $\mathbf{L_{kl}}$-ben;

3. Ha $\phi_1, \ldots, \phi_n$ tractatusi kijelentések, akkor $(N\{\phi_1, \ldots, \phi_n\})^* = {\sim}{\phi_1}^* \,\&\, \ldots \,\&\, {\sim}{\phi_n}^*$

[26] A viszontirányú fordítás lényegében megegyezik a tanulmányban bevezetett $\mathbf{L^{fin}_{tr}}$ véges tractatusi nyelv ott megadott és szintén *-gal jelölt fordításával. A különbség csupán annyi, hogy itt feltételeztük az elsőrendű predikátumoknak megfelelő névkategóriákat a tractatusi nyelvben. (I.m. 263sk.o.

Kezdjük a $\forall x Px$ és a $\exists x Px$ formulákkal:

$$(\forall x Px)^\circ =$$
$$= N\Big\{N\{((Px)^\circ)^{a/x^\circ}\} : a \in \mathtt{N_{ind}}\Big\} =$$
$$= N\{N\{P^\circ a_1\}, N\{P^\circ a_2\}\}$$

Fordítsuk most vissza az eredményt $\mathbf{L_{kl}}$ ismerősebb szimbolikájára:

$$\Big(N\{N\{P^\circ a_1\}, N\{P^\circ a_2\}\}\Big)^* =$$
$$= (\sim\sim Pa_1^* \ \&\ \sim\sim Pa_2^*) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Pa_1^* \ \&\ Pa_2^*$$

A $\exists x Px$ formula fordítása pedig a következőképpen alakul:

$$(\exists x Px)^\circ =$$
$$= N\Big\{N\{((Px)^\circ)^{a/x^\circ} : a \in \mathtt{N_{ind}}\}\Big\} =$$
$$= N\{N\{P^\circ a_1, P^\circ a_2\}\}$$

Az eredményt ismét érdemes visszafordítani a megszokott szimbolikára:

$$\Big(N\{N\{P^\circ a_1, P^\circ a_2\}\}\Big)^* = \ \sim(\sim Pa_1^* \ \&\ \sim Pa_2^*) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Pa_1^* \vee Pa_2^*$$

A szabályok ezekben az egyszerű esetekben valóban azt állították elő, amit elvártunk tőlük: kételemű tárgyalási univerzum mellett mind az eredeti formulák, mind a tractatusi változatok azt állítják, hogy a P predikátumot az x változó összes, illetve némely értéke kielégíti. Tekintsünk most egy árnyalattal összetettebb, kétszeresen kvantifikált formulát, $\exists x \exists y x R y$-t!

$$(\exists x \exists y x R y)^\circ =$$
$$= N\Big\{N\{((\exists y x R y)^\circ)^{a/x^\circ} : a \in \mathtt{N_{ind}}\}\Big\}$$

– ahol

$$(\exists y x R y)^\circ =$$
$$= N\Big\{N\{((x R y)^\circ)^{a/y^\circ} : a \in \mathtt{N_{ind}}\}\Big\} =$$
$$= N\Big\{N\{(a_1 R^\circ a_2)^{a/a_2}, : a \in \mathtt{N_{ind}}\}\Big\} =$$

$$= N\{N\{a_1 R^\circ a_1, a_1 R^\circ a_2\}\}$$

Végezzük el most rendre az a/x° behelyettesítéseket:

$$((\exists yxRy)^\circ)^{a_1/a_1} = N\{N\{a_1 R^\circ a_1, a_1 R^\circ a_2\}\}$$

$$((\exists yxRy)^\circ)^{a_2/a_1} = N\{N\{a_2 R^\circ a_2\}\} = a_2 R^\circ a_2$$

Így a teljes formula fordítása:

$$(\exists x \exists yxRy)^\circ =$$

$$= N\Big\{N\{N\{N\{a_1 R^\circ a_1, a_1 R^\circ a_2\}\}, a_2 R^\circ a_2\}\Big\}$$

Az eredményt ismét visszafordítjuk az ismerősebb szimbolikára:

$$\Big(N\Big\{N\{N\{N\{a_1 R^\circ a_1, a_1 R^\circ a_2\}\}, a_2 R^\circ a_2\}\Big\}\Big)^* =$$

$$= \sim(\sim\sim(\sim a_1{}^* R a_1{}^* \;\&\; \sim a_1{}^* R a_2{}^*) \;\&\; \sim a_2{}^* R a_2{}^*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1{}^* R a_1{}^* \vee a_1{}^* R a_2{}^* \vee a_2{}^* R a_2{}^*$$

Ez az eredmény nyilvánvalóan hibás; az alternációs tagok közül kimaradt ugyanis $a_2^* R a_1^*$, tehát az a lehetőség, hogy az R által jelölt reláció a_2 és a_1 jelölete között áll fenn. Precízebben fogalmazva: $U = \{u_1, u_2\}$, $\varrho(a_1) = v(x) = u_1$, $\varrho(a_2) = v(y) = u_2$, $\varrho(R) = \{\langle u_2, u_1\rangle\}$ mellett $\exists x \exists yxRy$ igaz, $(\exists x \exists yxRy)^{\circ *}$ viszont nem. Ebben a triviális * fordítás nyilvánvalóan ártatlan; a példa tehát azt mutatta meg, hogy a $^\circ$ fordítás már kételemű kvantifikációs tartomány mellett sem igazsáfeltétel-tartó.

Magasabb elemszámú tartományokra természetesen *mutatis mutandis* érvényesek lesznek az imént elmondottak; a különbség csupán annyi, hogy ha végtelen halmazon kvantifikálunk, nem használhatjuk a * viszontfordítást. Az iménti hiba mindenképpen generálódni fog, hiszen az y° helyére helyettesített nevek között fel fog bukkanni x° is, és így a $\langle y^\circ, x^\circ\rangle$ pár kimarad a megvizsgált lehetőségek közül.

A hiba természetesen abból ered, hogy a behelyettesítés után már semmi nem utal egy kifejezésben arra, hogy benne mely kifejezések lettek újonnan behelyettesítve: sem $\mathbf{L_{tr}}$-ben, sem $\mathbf{L_{kl}}$-ben nem logikai törvény például az

$$(\phi^{t'/t})^{t''/t'} \Leftrightarrow \phi^{t''/t}$$

– vagy speciális esetként a

$$(\phi^{t'/t})^{t/t'} \Leftrightarrow \phi$$

ekvivalenciaséma.

3.10. A kirívóan hibás kezelés korrekciója

Az előző szakaszban tárgyalt problémákat megoldhatjuk a fordítás következő módosításával. Továbbra is feltételezzük, hogy a tractatusi nyelvben vannak individuumnévként és predikátumként viselkedő nevek, amelyek a fordítást egyáltalán lehetővé teszik. Lemondunk azonban arról, hogy egy teljes elsőrendű nyelvet fordítsunk le a tractatusi nyelvre, és csak egy, a tractatusi nyelv kapacitásának megfelelően korlátozott változószámú, névkonstans-mentes töredékkel foglalkozunk. Feltételezzük, hogy a tractatusi nyelvben vagy végtelen sok individuumnévként viselkedő név van, vagy több, mint amennyi változó a nyelvtöredékünkben. E nevek osztályát továbbra is $\mathtt{N_{ind}}$ jelöli. A nyelvtöredék változóinak $\mathtt{Var}$ osztályát kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük $\mathtt{N_{ind}}$ egy $\mathtt{N_{var}}$ részosztályának. Hogy a nyelvtöredék ne legyen üres, feltesszük, hogy $\mathtt{N_{var}}$ sem az. A fennmaradó $\mathtt{N_{ind}}$-beli nevek közül kerül ki a kvantifikációs tartománynak megtett, nemüres $\mathtt{N_U}$. (Kvantifikációs tartományon tehát ebben a szakaszban nem individuumok, hanem nevek osztályát értjük. Mivel a tractatusi nyelvben a nevek és a tárgyak között bijektív kapcsolat van, ez a beszédmód legitim.)

Tehát a következőket kötöttük ki: $\mathtt{N_{var}} \cap \mathtt{N_U} = \emptyset$; $\mathtt{N_{var}} \cup \mathtt{N_U} \subseteq \mathtt{N_{ind}}$; továbbá $\mathtt{N_{var}} \neq \emptyset$ és $\mathtt{N_U} \neq \emptyset$. Ha $\mathtt{N_{ind}}$ kételemű, már tudunk egyváltozós formulákat fordítani és egyelemű kvantifikációs tartományt használni. Ennél gazdagabb nyelvi és szemantikai struktúrákhoz többelemű $\mathtt{N_{ind}}$-re van szükség. (Ha ragaszkodunk névkonstansok szerepeltetéséhez a formulákban, akkor azokat $\mathtt{N_{ind}}$ egy mind $\mathtt{N_{var}}$-tól, mind $\mathtt{N_U}$-tól diszjunkt részosztályára kell fordítanunk; és ezzel tovább szaporítjuk a tractatusi nyelvvel szembeni elvárásainkat.)

A predikátumokat nekik megfelelő kategóriájú tractatusi nevekre fordítjuk. Hogy a fordítás a lehetőségekhez képest jelentéstartó legyen, fel kell tennünk, hogy a $\mathtt{N_{pr,\mathit{n}}}$ osztályban ugyanannyi név van, ahány n-argumentumú predikátum a forrásnyelvben. Ahhoz, hogy egyáltalán valamilyen nyelvtöredéket le tudjunk fordítani a tractatusi nyelvre, minimálisan annyit kell feltennünk, hogy az $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathtt{N_{pr,\mathit{i}}}$ osztály nemüres.

A fejezet összes eddigi fordítási példája egy olyan elsőrendű nyelvtöredékre korlátozódott, amelyben két változó van, valamint néhány egyargumentumú és néhány kétargumentumú predikátum. Az azonosságpredikátum használatától is eltekintettünk. Ettől a következőkben sem fogunk eltérni, de fordítási szabályainkat valamivel nagyobb általánosságban fogalmazzuk meg. A fordítást ezúttal $^\diamond$ jelöli. Csak a kvantifikált formulák fordítási szabálya változik meg:

$$(\forall x\phi)^\diamond \;=\; N\Big\{N\{((\phi)^\diamond)^{a/x^\diamond}\} : a \in \mathtt{N_U}\Big\}$$

– illetve

$$(\exists x\phi)^\diamond \;=\; N\Big\{N\{((\phi)^\diamond)^{a/x^\diamond} : a \in \mathtt{N_U}\}\Big\}$$

Ezek a szabályok már probléma nélkül alkalmazhatók többszörösen kvantifikált formulák fordítására. Az előző szakasz példájánál maradva megadjuk $\exists x \exists y xRy$ fordítását kételemű univerzumon. Nem változtatjuk meg, csak az új kontextushoz igazítjuk a jelöléseket: $\mathtt{N_U} = \{a_1, a_2\}$; továbbá $x^\diamond \neq y^\diamond$ és természetesen $\mathtt{N_U} \cap \{x^\diamond, y^\diamond\} = \emptyset$.

$$(\exists x \exists y xRy)^\diamond =$$

$$= \; N\Big\{N\{((\exists y xRy)^\diamond)^{a/x^\diamond} : a \in \mathtt{N_U}\}\Big\}$$

– ahol

$$(\exists y xRy)^\diamond =$$
$$= \; N\Big\{N\{((xRy)^\diamond)^{a/y^\diamond} : a \in \mathtt{N_U}\}\Big\} =$$
$$= \; N\Big\{N\{(x^\diamond R^\diamond y^\diamond)^{a/y^\diamond} : a \in \mathtt{N_U}\}\Big\} =$$
$$= \; N\{N\{x^\diamond R^\diamond a_1, x^\diamond R^\diamond a_2\}\}$$

– vagyis

$$(\exists x \exists y xRy)^\diamond =$$
$$= \; N\Big\{N\Big\{(N\{N\{x^\diamond R^\diamond a_1, x^\diamond R^\diamond a_2\}\})^{a/x^\diamond} : a \in \mathtt{N_U}\Big\}\Big\} =$$
$$= \; N\Big\{N\{N\{N\{a_1 R^\diamond a_1, a_1 R^\diamond a_2\}\}, N\{N\{a_2 R^\diamond a_1, a_2 R^\diamond a_2\}\}\}\Big\}$$

Az eredményt az áttekinthetőség kedvéért ezúttal is visszafordíthatjuk, de egy az eredetinél bővebb nyelvtöredékre, amelyben a tárgyalási univerzum két elemének van neve. A fordítást ezúttal is * jelöli, de az $x^{\diamond *} = x$ azonosság nem teljesül:

$$\Big(\; N\Big\{N\{N\{N\{a_1 R^\diamond a_1, a_1 R^\diamond a_2\}\}, N\{N\{a_2 R^\diamond a_1, a_2 R^\diamond a_2\}\}\}\Big\}\Big)^* =$$

$$= \sim(\sim\sim(\sim a_1^* R a_1^* \;\&\; \sim a_1 R^* a_2^*) \;\&\; \sim\sim(\sim a_2^* R a_1^* \;\&\; \sim a_2^* R a_2^*)) =$$

$$= \sim(\sim a_1^* R a_1^* \;\&\; \sim a_1^* R a_2^* \;\&\; \sim a_2^* R a_1^* \;\&\; \sim a_2^* R a_2^*) =$$

$$= a_1^* R a_1^* \vee a_1^* R a_2^* \vee a_2^* R a_1^* \vee a_2^* R a_2^*$$

Ezúttal tehát nem maradt ki egyetlen lehetőség sem. Ez annak köszönhető, hogy a változókat a kvantifikációs tartományon kívüli nevekre fordítottuk, és így a behelyettesítések során az egyik változó fordításának helyére nem kerülhetett a másik változó fordítása. A fordítást nem torzítja el a kvantifikációs tartomány növelése sem. Ráadásul tetszőleges kvantoros szerkezet fordítható így a tractatusi logikai nyelvre; nem fog zavar keletkezni, mert mindig $\mathtt{N}_{\mathtt{var}}$-beli név helyére helyettesítünk $\mathtt{N}_{\mathtt{U}}$-beli nevet.

Ráadásul a fordítás során lényegesen gyengébb előfeltevésekkel kellett élnünk. E tekintetben az új fordítás legnagyobb előnye az, hogy a 3.9. szakasztól eltérően nem végtelen kvantifikációs tartomány és végtelen kapacitású tractatusi nyelv mellett köteleztük el magunkat; hanem csupán amellett, hogy *ha* végtelen a kvantifikációs tartomány, *akkor* a tractatusi nyelvnek is végtelen kapacitással kell bírnia. Ez pedig olyan követelmény, amelyet, mint a fejezet korábbi szakaszaiban láttuk, a tractatusi nyelv mindenképpen teljesít.

Tehát sikerült megoldani a 3.9. szakaszban felmerült problémákat. Ahogy azonban lenni szokott, a megoldás újabb problémákat vet fel. Az új fordítás ugyanis tartalmaz egy megszorítást, amellyel az elvetett, hibás fordítás nem élt. Feltételeztük, hogy a kvantifikációs tartomány szűkebb, mint az individuumnevek osztálya. Ezzel a megszorítással szimulálni tudtuk ugyan az elsőrendű kvantifikációt a tractatusi logikai szimbolikában, de ez a szimuláció nyilvánvalóan nem esik egybe a fejezet korábbi szakaszaiban tárgyalt tractatusi kvantifikációval, amelyben a kvantifikációs tartomány az összes individuumnév osztálya. Igaz ugyan, hogy egy-egy kvantifikált kijelentéshez mindig csak néhány elemet kell kihagyni ebből az osztályból; de már egyetlen elem kihagyása is eltorzítja a kvantifikált kijelentés értelmét.

3.11. Megoldási kísérlet mesterséges nevek bevezetésével

Az újabb fordítás tehát csak a saját korábbi tanulmányom néhány hibáját oldja meg, a tractatusi kvantifikáció korábbi szakaszokban taglalt problémáját nem. Mégis utat mutat egy újabb megoldási lehetőség felé, amely, akárcsak az N művelet 3.5. szakaszban bevezetett módosítása, lazít egyet a tractatusi nyelvfelfogás rendkívül szigorú keretein. A következőről van szó.

A tractatusi individuumnevek $\mathtt{N}_{\mathtt{ind}}$ osztálya mellé felvesszük a változóként használt nevek $\mathtt{N}_{\mathtt{var}}$ osztályát. E neveket változóneveknek fogjuk nevezni.[27] Szintaktikai formájukat

[27] Polgárdi Ákossal közös *Tractatus*-kontrollfordításunk egyik legnagyobb (általunk ismert) kudarca volt, hogy csak találgatni tudtuk a 3.314. pontban szereplő 'variable Name' kifejezés értelmét. Ezt Márkus 'változónév'-ként adta vissza; mi a 'változóként felfogott név' fordulatot választottuk, gondolván, hogy olyasmiről van szó, mint amikor aRb-ben a és b tetszőleges nevet képviselhet; vagy mint amikor a 'János szereti Marit' logikai példamondat szintén az összes ugyanilyen formájú mondatot képviseli.

tekintve megegyeznek az individuumnevekkel, és jelöletük is egy-egy tetszőlegesen választott individuum – akár minden egyes változónév jelölheti ugyanazt az individuumot is; ez teljesen mindegy. Az individuumok osztályát tehát nem bővítjük; a változónevek esetében lemondunk viszont arról a tractatusi dogmáról, hogy két névnek nem lehet ugyanaz a jelölete. (Ez a leginkább vitatható pontja ennek a megoldási kísérletünknek; a későbbiekben még visszatérünk rá.) Végtelen sok változónevet vezetünk be; ezek mindegyike megfelel egy tényleges individuumváltozónak, és ennek megfelelően az $\dot{x}$, $\dot{y}$ stb. jelöléseket használhatjuk rájuk. Az a, b stb. jelöléseket megtartjuk $\mathtt{N_{ind}}$ elemei számára. A változónevek különböznek mind a tényleges individuumváltozóktól, mind a klasszikus elsőrendű nyelvek változóitól abban a tekintetben, hogy nem változók, hanem nevek, amelyek tetszőleges, de rögzített individuumot jelölnek.

A $\phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ formula így $\phi(a_1, \ldots, a_n)$-hez hasonlóan maga is kijelentés lesz, nem pedig kijelentésfüggvény. Ugyanakkor alkalmas lesz arra, hogy kijelentésfüggvény előállítására használjuk, éspedig pontosan azon a módon, ahogy az előző szakaszban megadott fordításban tettük. Ha $\phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$-ben valamely $\dot{x}_n$ változónevet behelyettesítjük az x_k tényleges változóval, pontosan ahhoz a kijelentésfüggvényhez jutunk, amelyre az adott változóra való kvantifikációhoz szükségünk van. E kijelentésfüggvény értékei mindazok a kijelentések, amelyeket úgy kapunk, hogy $\phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$-ben $\dot{x}_k$ összes előfordulása helyére valamely tényleges individuumnevet írunk. Nem kerülhet sor nem várt helyen történő, hibás behelyettesítésekre, mert a még behelyettesítésre váró változónevek különböznek a behelyettesített individuumnevektől; az előbbiek $\mathtt{N_{var}}$-ból, az utóbbiak $\mathtt{N_{ind}}$-ből kerülnek ki. A behelyettesítés művelete tehát nem jár információvesztéssel.

A kijelentésváltozókat előállító absztrakciós műveletre nyugodtan használhatjuk Geach eredeti jelölését a jelen kontextushoz igazított értelmezéssel; a 3.7. szakasz elején bemutatott hibák ellen itt védve vagyunk, hiszen nem tetszőleges név, hanem speciálisan megválasztott változónév szerepel az $(\ddot{x} : \phi(\dot{x}))$ absztrakciós művelet argumentumában. A művelet argumentuma a $\phi(\dot{x})$ kijelentés (és nem valamely $\phi(a)$, mint Geach eredeti verziójában); eredménye pedig az a kijelentésfüggvény, amelynek elemeitt úgy kapjuk meg, hogy $\phi(\dot{x})$-ben $\dot{x}$ összes előfordulását $\mathtt{N_{ind}}$ valamely elemével helyettesítjük. Mivel a behelyettesítés az összes előfordulásra kiterjed, nem lépnek fel az előfordulások beazonosításával kapcsolatos – a 3.7. szakaszban végzetesnek bizonyult – problémák.

Fontos tisztázni: ahhoz, hogy a kijelentésfüggvényt megkapjuk, nem szükséges annak összes értékét külön-külön előállítanunk. Ha az individuumtartomány végtelen, akkor

Könnyen lehet, hogy tévedtünk; az viszont szinte teljesen biztos, hogy az enigmatikus kifejezés nem abban az értelemben szerepel a *Tractatus* szövegében, mint magyar megfelelői e szakasz főszövegében.

ez esetenként végtelen sok művelet elvégzését jelentené. Szükséges viszont, hogy minden egyes esetben elvben elvégezhetők legyenek a behelyettesítések. A 3.7. szakaszban nem mindig tudtuk elvégezni a behelyettesítéseket, mert egy összetett kijelentésen belül egy elemi kijelentés előfordulásainak felismerésére nem találtunk szintaktikai kritériumot. Itt ilyen probléma nem merülhet fel, mert a behelyettesítés mindig minden előfordulásra kiterjed.

Tetszőleges kvantorszerkezetű elsőrendű formula tractatusi változatának konstrukciójára ezek után már anélkül használhatjuk az előző szakaszban megadott fordítás módszerét, hogy annak hibáját is átvennénk; a kvantifikáció a teljes individuumtartomány felett történik.

Megadjuk tetszőleges $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\phi(x_1, \ldots, x_n)$ prenex formula[28] konstrukcióját a változónevekkel bővített tractatusi logikai szimbolikában.

1. Kiindulunk a $\phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ kijelentésből. Ez a kijelentés kvantor- és változómentes, tehát véges sok (változóneveket is tartalmazó) elemi kijelentésből előállítható az N művelet egy- és kétargumentumú alkalmazásaival.

2. Ha már előállítottunk valamely $\psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k)$ részkijelentést, és Q_kx_k a soron következő kvantor (tehát vagy $\psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k) = \phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ és $k = n$, vagy $\psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k) = Q_{k+1}x_{k+1} \ldots Q_nx_n\phi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ és $1 < k \leq n$), akkor

   (a) amennyiben Q_k egzisztenciális kvantor,

      i. alkalmazzuk az $(\ddot{x}_k : \psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k))$ absztrakciót, vagyis a $\psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k)$ kijelentésben $\dot{x}_k$ összes előfordulásának helyére x_k-t írunk;

      ii. a kapott kijelentésváltozóra alkalmazzuk az N műveletet; majd

      iii. az eredményt tagadjuk N újabb alkalmazásával;

   (b) amennyiben Q_k univerzális kvantor,

      i. $\psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k)$-t tagadjuk az N művelettel;

      ii. alkalmazzuk az $(\ddot{x}_k : N\psi(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k))$ absztrakciót;

      iii. a kapott kijelentésváltozóra alkalmazzuk az N műveletet.

[28] Prenex formulának mondjuk a klasszikus elsőrendű nyelvek azon formuáit, amelyekben minden kvantor a formula elején szerepel. A kvantorok rendezett n-esét a formula prefixumának, a kvantorokat követő kvantormentes nyitott formulát a formula mátrixának nevezzük. Az elsőrendű logika alapvető tétele, hogy bármely formulához létezik vele elvivalens prenex formula; ezt a formula prenex alakjának nevezzük. Triviális esetektől eltekintve a prenex alak nem egyértelmű, de további szerkezeti megszorításokkal egyértelművé tehető.

A megadott módon tetszőleges $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\phi(x_1, \dots x_n)$ prenex formula $3n$ művelet alkalmazásával előállítható a $\phi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ kijelentésből.

A fejezet utolsó konstrukciós példájaként előállítjuk a 3.7. szakaszban problematikusnak bizonyult $\forall x\exists y(xRy \,\&\, yRx)$ tractatusi megfelelőjét.

$$\forall x\exists y(xRy \,\&\, yRx) =$$

$$= N\Big(\ddot{x} : N(\ddot{y} : N\{N\{\dot{x}R\dot{y}\}, N\{\dot{y}R\dot{x}\}\})\Big)$$

A konstrukciós algoritmust követve $xRy \,\&\, yRx$ tractatusi változatából, $N\{N\{\dot{x}R\dot{y}\}, N\{\dot{y}R\dot{x}\}\}$-ből indulunk ki, amely, még egyszer hangsúlyozzuk, nem kijelentésfüggvény, hanem kijelentés, hiszen $\dot{x}$ és $\dot{y}$ speciális individuumnevek. Ebből a kijelentésből állítjuk elő az $(\ddot{y} : N\{N\{\dot{x}R\dot{y}\}, N\{\dot{y}R\dot{x}\}\})$ kijelentésfüggvényt. E függvény értékei az $N\{N\{\dot{x}Ra\}, N\{aR\dot{x}\}\}$, $N\{N\{\dot{x}Rb\}, N\{bR\dot{x}\}\}$, $N\{N\{\dot{x}Rc\}, N\{cR\dot{x}\}\}$ stb. kijelentések. Ezek együttes tagadását képezzük az N művelettel. A kapott kijelentést tagadjuk N újabb alkalmazásával; most jutottunk el $\exists y(xRy \,\&\, yRx)$ tractatusi megfelelőjéhez. Ez megintcsak nem kijelentésváltozó, hanem konkrét kijelentés. Geach jelöléseivel ez $N\{N(\ddot{y} : N\{N\{\dot{x}R\dot{y}\}, N\{\dot{y}R\dot{x}\}\})\}$ lesz. Ezt most ismét tagadunk kell; miután a két tagadás kioltja egymást, visszajutottunk $N(\ddot{y} : N\{N\{\dot{x}R\dot{y}\}, N\{\dot{y}R\dot{x}\}\})$-hez. Ebből előállítjuk az $(\ddot{x} : N(\ddot{y} : N\{N\{\dot{x}R\dot{y}\}, N\{\dot{y}R\dot{x}\}\}))$ kijelentésfüggvényt; majd az utóbbi összes értékének tagadásával $\forall x\exists y(xRy \,\&\, yRx)$ keresett tractatusi megfelelőjét.

A konstrukció során az előző szakaszokban tárgyalt nehézségek egyike sem lépett fel. A konstrukció minden egyes pontján adott volt az a kijelentés vagy kijelentésváltozó, amellyel tovább kellett dolgoznunk; és egyértelműen adott volt a következő elvégzendő művelet is. Nem kényszerültünk az N művelet módosítására sem, mint a 3.5. szakaszban. E tekintetben tehát minden korábbinál jobb megoldáshoz jutottunk.

A megoldásért azonban ezúttal is komoly árat kellett fizetnünk: le kellett mondanunk arról a tractatusi szintaktikai alapelvről, hogy minden tárgynak pontosan egy neve van, hiszen „a tulajdonképpeni név az, ami a tárgyat jelölő összes szimbólumban közös" (3.3411). Az e szakaszban körvonalazott módosított tractatusi logikai szimbolikában a változóként használt nevet és a vele azonos jelöletű tulajdonképpeni nevet teljesen esetlegesen különböztette meg az, hogy az egyiket hozzárendeltük egy változóhoz és eszközként használtuk a kijelentésváltozók absztrakciójában, a másikat pedig nem. Az ilyen esetleges megkülönböztetéseknek a tractatusi szimbólumfelfogásban nincs helye.

Hogy pontosan lássuk, a probléma filozófiai tétjét, tegyük fel a kérdést: feltéve, hogy az $\dot{x}$ változónév és az a tulajdonképpeni név ugyanazt a tárgyat jelölik, $\dot{x}Rb$ és aRb

vajon ugyanaz a kijelentés lesz, vagy más és más? Világos, hogy a két név különbözik, hiszen más és más szintaktikai funkciójuk. Ha mármost a két kijelentés egy és ugyanaz, akkor ellentmondásba kerülünk azzal, hogy az elemi kijelentés nem több, mint „nevek összekapcsolódása, láncolata" (4.22), hiszen itt ugyanaz az az elemi kijelentés különböző nevek láncolataként is előállt. Ha viszont nem egy és ugyanaz a két kijelentés, akkor az elemi kijelentések függetlenségének alapelvével (4.21sk.; vö. 2.061) kerültünk ellentmondásba, hiszen $\dot{x}Rb$ és aRb kölcsönösen következnek egymásból.

Úgy tűnik, nincs kiút; minden irányban ellentmondásra jutunk. De induljunk el még egyszer visszafelé, hátha valamelyik premissza feladásával mégiscsak menthető a helyzet! Az ekvivalens kijelentések azonosak (5.141) – márpedig $\dot{x}Rb$ és aRb ekvivalensek. Azonos elemi kijelentések pedig azonos nevekből állnak. Tehát az $\dot{x}$ változónév és az a tulajdonképpeni név valójában egy és ugyanaz. De hát akkor hogy lehet eltérő a szintaktikai funkciójuk?

Úgy vélem, ezen a ponton remélhetünk egérutat. Wittgenstein a 3.32-ben bevezet egy nagyon fontos megkülönböztetést *jel* és *szimbólum* között: „[a] jel az, ami a szimbólumból érzékileg észlelhető".[29] A következő bekezdésekben azt a nagyon fontos esetet tárgyalja, amikor egyazon jel több különböző szimbólumot is képviselhet; az ilyesmi „a legalapvetőbb tévedések " forrása a filozófiában (3.324). Ugyanakkor az is világos, hogy egy szimbólumnak megfelelhet nagyon sok jel. Ebbe a lehetőségbe szeretnék belekapaszkodni Az, hogy egy tárgynak csak egy neve lehet, nem jelenti azt, hogy ne alkalmazhatnánk rá több különböző jelet is. Ismerjük el, hogy $\dot{x}$ és a ugyanaz a név abban a tractatusi értelemben, hogy a kettő ugyanaz a *kifejezés* vagy *szimbólum*, hiszen ugyanúgy befolyásolják a kijelentések értelmét, amelyekben szerepelnek (3.31). A *Tractatus* sajátos felfogása szerint egy elemi kijelentés értelme a tárgyaknak az a lehetséges konfigurációja (egy elemi összefüggés), amelynek létrejöttét a kijelentés állítja. Ez $\dot{x}Rb$ és aRb kijelentések értelme pedig ebben az értelemben kétségkívül ugyanaz. De ettől még nem kell, hogy ugyanannak a jelnek is tekintsük őket.[30]

A kvantifikált kijelentések előállítása során használt stratégia tehát a következő lehetne: vezessünk be speciális jeleket, amelyek *mint szimbólumok* a megszokott nevek valamelyikével (esetleg mind ugyanazzal) lesznek azonosak, de *mint jelek* egyértelműen utalnak a logikai szimbolikában használt változóink valamelyikére; például úgy, hogy ugyanazt a betűt használjuk rájuk. Ezeket nevezzük változóneveknek, megkülönböz-

[29] A megkülönböztetés a szövegben nem következetes; ld. az 5.3. szakaszt.

[30] Szimbólum és jel megkülönböztetése nem keverendő össze típus és példány megkülönböztetésével. Példányai jeleknek vannak, nem pedig szimbólumoknak.

tetve őket a tulajdonképpeni névnek nevezett jelektől; de a megkülönböztetés során nem szabad elfeledkeznünk arról, hogy a változónevek és a tulajdonképpeni nevek *mint szimbólumok* ugyanazok.

Amikor például az N műveletet olyan kijelentésváltozóra alkalmazzuk, amelynek értékeit változónevek alkalmazásával határoztuk meg, a kijelentésváltozó értékeit ez nem befolyásolja. Ezek az értékek ugyanis maguk a kijelentések *mint szimbólumok*, nem pedig e szimbólumok jelei; és ugyanígy: az N művelet kijelentések *mint szimbólumok* együttes tagadása, nem pedig jeleké; kijelentésjeleket nem is lehet tagadni, csak kijelentéseket. Hasonlóképpen a művelet eredménye is kijelentés, nem pedig kijelentésjel. Ezért tehetünk azonosságjelent ϕ és $N\{\{\phi\}\}$ közé; ez két különböző jel, de ugyanaz a szimbólum. Az N művelet nem integráns része a kijelentéseknek. Kijelentésjelekben szerepel, amelyek kijelentéseket képviselnek. A kijelentések értelmét egyáltalán nem jellemzi, hogy alkalmaztuk-e az N műveletet jeleik előállításában; csupán az, hogy el *lehet* jutni hozzájuk az N művelettel.[31]

A tractatusi nyelv- és logikafilozófia szempontjából semmi kifogásolnivaló nem látszik abban, ha a nevek egy részére olyan jeleket is bevezetünk, amelyeket aztán speciális célra, kijelentésváltozók meghatározására fogunk használni a módosított logikai szimbolikában. Való igaz, hogy ez a lépés kissé kényszeredett és esetleges; de nem sokkal esetlegesebb, mint például az N igazságművelet kitüntetése a számtalan lehetséges határozatlan argumentumszánú művelet között, amelyek alkalmasak lennének kijelentések generálására. E megfontolások alapján a kvantifikáció e fejezetben tárgyalt tractatusi kezelései közül ezt az utolsót vélem a legelőnyösebbnek; tetszőleges kvantifikált szerkezet előállítását lehetővé teszi a tractatusi nyelvfilozófiai alapelvek minimális megsértésével.

A következő fejezetben rekonstruált logikai szimbolikában mégsem ezt a megoldást fogjuk alkalmazni. Ennek nagyon egyszerű oka van. A kvantifikáció e szakaszban bemutatott kezelése a tractatusi logikai szimbolika módosítását igényli; tehát ha ezt illesztenénk bele a következő fejezetben felépített rendszerbe, az már nem rekonstrukciója, hanem renoválása lenne a wittgensteini elgondolásoknak.

[31] A helyzet némiképp hasonló a számokéhoz: a 4 számot egyáltalán nem befolyásolja, hogy a 2×2 vagy a 2^2 jel képviseli-e; az viszont igen, hogy páros és négyzetszám, tehát a 4 szimbólumnak a 2×2 és a 2^2 jelek egyaránt megfelelnek.

4. fejezet

A tractatusi logikai szimbolika rekonstrukciója

4.1. Bevezetés

Kettős nimbusz övezi a *Tractatus*t. Egyrészt a pontosság apoteózisaként tiszteljük, amely maga is a lehető legnagyobb pontosság igényével íródott; másrészt úgyszólván szakrális szövegként, amelynek kinyilatkoztatásai olykor a legkisebb jelét sem adják annak, hogy ez a pontosság halandó olvasók számára is hozzáférhető volna – s ráadásul Wittgenstein értékelése szerint ennek az eszménynek a megvalósítása csupán belépő a filozófia valódi feladatához.[1]

Nem egy, hanem két pontosságeszménnyel van dolgunk a *Tractatus*ban. Az egyik az a pontosságeszmény, amelyről a *Tractatus* egy jelentős része szól; egy olyan ideális jelnyelv eszménye, amely lehetővé teszi a gondolatok transzparens, logikai szerkezetüket tisztán tükröző megfogalmazását. Ezt az eszményt nevezem a tractatusi *logikai szimbolikának*. Rekonstrukcióra mindenekelőtt azért van szükség, mert a *Tractatus* szövegében egy másik eszmény *mutatkozik meg*: a gondolatok tömör, aforisztikus és metaforikus nyelven való rögzítésének pontosságeszménye. Az előszó és az utolsó bekezdések önértékelése szerint a két eszmény egymást támogatja. Az értelmezői tapasztalat szerint azonban nem;

[1] Mint annyi mindent, ezt is Ramsey fogalmazta meg legpontosabban: „Wittgenstein nem folyamatos prózában ír, hanem rövid bekezdésekben [...]. Ez vonzó epigrammatikus színezetet ad művének, és részleteiben talán pontosabbá is teszi azt, hiszen minden egyes mondatnak külön figyelmet kellett szentelnie. Ugyanakkor úgy tűnik, ez a tagolás megakadályozta Wittgensteint abban, hogy jó néhány szakkifejezését és elgondolását pontos magyarázattal lássa el – talán éppen azért, mert a magyarázatok kedvéért fel kellett volna áldoznia a pontosság egy részét." (Ramsey [2004], 190.o.)

a szövegben kifejtett pontosságeszményt jószerével hozzáférhetetlenné teszi a szövegben megmutatkozó.

Ebben a fejezetben a pontosság e jószerével hozzáférhetetlen eszményét, a tractatusi logikai szimbolikát kísérlem meg formális eszközökkel rekonstruálni. A logikai szimbolika a fregei fogalomírás tractatusi megfelelője (3.325); de Fregével szemben Wittgenstein nem fárasztotta magát fogalomírása tételes kifejtésével. Mindazonáltal megfogalmazta a vele kapcsolatos alapvető elvárásokat. Érdemes ezeket áttekinteni, mielőtt belevágnánk a rekonstrukcióba.

Mindenekelőtt: ez a logikai szimbolika a fregei fogalomírástól eltérően nem önálló nyelv, hiszen a *Tractatus* szerint egyetlen nyelv létezik (5.62), és az „úgy, ahogy van, logikailag teljesen rendezett" (5.5563), tehát semmilyen értelmes közlés nem szorul egy logikai jelnyelv külső támogatására.[2] A logikai szimbolika elvei Wittgenstein elgondolása szerint rejtetten a nyelv minden kijelentésében jelen vannak; de mivel „[a] nyelv álruhába öltözteti a gondolatot", a felszíni jelölési konvenciók mögötti logikai formákat „[e]mberileg lehetetlen [...] közvetlenül kiemelni a köznyelvből" (4.002). Viszont lehet rájuk következtetni abból a tényből,[3] hogy lehetséges értelmes kijelentéseket tenni a nyelvben. A kikövetkeztetett logikai szerkezeteket pedig explicitté lehet tenni egy tisztán logikai jelölésmód segítségével.

Ezt a jelölésmódot mindenekelőtt transzparenciája különbözteti meg a nyelvben általában használatos szimbólumrendszerektől; az, hogy grammatikája a logikai grammatika, tehát kifejezéseinek grammatikai formája megegyezik logikai formájukkal. Így a logikai szimbolikában előállított kijelentésjelek közvetlenül tükrözik az általuk reprezentált helyzet szerkezetét. Vagy a tractatusi képelmélet terminusaiban fogalmazva: e kijelentések logikai képei a valóságnak, mert leképezési formájuk logikai forma (2.181). A képelmélet centrumában áll az a tézis, hogy *minden kép egyben logikai is* (2.182); ennek közvetlen következménye, hogy *bármely értelmes kijelentésjel lefordítható a logikai szimbolikára.* Voltaképpen ez a fordítás jelenti a kijelentések logikai analízisét. Kitüntetett szerepe ellenére Wittgenstein nem sokat bajlódott a logikai szimbolika tételes kifejtésével. Mindenekelőtt ez teszi indokolttá a rekonstrukciót.

A *Tractatus* nyelvfilozófiai alaptézisének nevezhetjük a következő állítást: *minden kijelentés az elemi kijelentések igazságfüggvénye* (5). Ennek gyakorlati kiegészítése az,

[2] Sokáig azt gondoltam, hogy Frege fogalomírása sem önálló nyelv, hanem a nyelven belül bevezetett jelölésmód, amely ugyanúgy nem képes a természetes nyelv támogatása nélkül gondolatokat kifejezni, ahogy a mikroszkóp sem helyettesítheti a szemet a látásban. Máté András hosszas viták során meggyőzött, hogy a fregei mikroszkóp-hasonlat e tekintetben félrevezető. (Vö. Frege [2000], 16sk.o.)

[3] A szó tractatusi értelmében ez persze nem tény.

amit a tractatusi logikai szimbolika alaptézisének nevezhetünk: *bármely kijelentés előállítható úgy, hogy az együttes tagadás műveletét szukcesszív módon alkalmazzuk elemi kijelentésekre* (6sk). Az utóbbi tézisből következik az előbbi, hiszen az igazságfüggvények az igazságműveletek alkalmazásának eredményei (5.25sk.). A fordított irány, ahogy azt a 3. fejezetben láttuk, már korántsem problémamentes. Az együttes tagadás műveletének argumentuma kijelentésváltozó (5.5skk.), amelynek értékei közös formai jegyeik alapján összeválogatott kijelentések (3.317). Az adott szintaktikai feladathoz szükséges kijelentésváltozó meghatározása, mint a 3. fejezetben láttuk, nem evidens feladat.

Az elemi kijelentés egyszerű nevek láncolata (4.22); láncolaton nevek elágazás és körkörösség nélküli, végtelen sorozatát fogjuk érteni.[4] A nevek az egyszerű tárgyakat képviselik a kijelentésekben (3.22). Az egyszerű tárgyak a tractatusi ontológia építőkövei; lehetséges elemi konfigurációik az összefüggések.[5] Egy tárgy formáján más tárgyakkal való konfigurációs lehetőségeit értjük (2.0141). E konfigurációs lehetőségek alkotják a logikai teret (2.013); az e térben realizálódott konfigurációk pedig a világot (1.13).

Az elemi kijelentések a tárgyak egy-egy lehetséges elemi konfigurációját ábrázolják (4.21). Egy elemi kijelentés akkor igaz, ha az általa ábrázolt konfiguráció megvalósul; tehát ha egy elemi tényt képez le (4.25). Egy összetett kijelentés igazsága két tényezőtől függ: az őt alkotó elemi kijelentések igazságértékétől, valamint attól, hogy miképpen állítható elő igazságműveletekkel ezekből az elemi kijelentésekből. Ebből következik, hogy a kijelentések az elemi kijelentések igazságfüggvényei.

Ezek azok az alapvető szintaktikai és szemantikai jellegzetességek, amelyekkel a rekonstruált logikai szimbolikának rendelkeznie kell; a részletek kidolgozása azonban nem kis nehézségeket rejt. Ezek közül alighanem a legfontosabb, hogy milyen eszközök megengedhetők a kijelentésváltozók bevezetésekor. Ez, mint a 3. fejezetben láttuk, jelentősen befolyásolja a tractatusi logikai szimbolika kifejezőerejét. Az ott bevezetett kijelentésváltozó-absztrakciós eszközök közül csak egyet fogunk átemelni. Más eszközök átvétele a rekonstruált logikai szimbolika eltérő kifejezőerejű, alternatív változatait eredményezné. (Más interpretációs döntések mentén már így is négy alternatív rekonstrukciónk lesz.)

[4] A 2. fejezetben tárgyalt 2. modell nem felel meg ennek az elvárásnak; a nevek láncolata ott elágazó az elemi kijelentésekben. Megfelelő technikával az ilyen elágazó szerkezetek is lineárissá tehetők.

[5] A *Sachverhalt* terminus fordítási problémáit ld. a *Tractatus* 2004-es magyar kiadásának utószavában: 108sk.o. Összefüggésen lehetséges, nem pedig ténylegesen létrejött konfigurációt (elemi tényt) értünk. Ha a *Sachverhalt* esetleg mégiscsak realizálódott lehetőséget jelent (ld. Black [1964], 39skk.o.), az még mindig csak terminológiai probléma; a tractatusi metafizikában a lehetséges és a realizálódott konfigurációk egyaránt szerepet játszanak, hiszen a logikai tér a lehetőségek tere, nem pedig a tényeké.

Természetesen nem ez az első kísérlet a *Tractatus* kijelentéselméletének formális rekonstrukciójára. Az eddig megszületett tucatnyi próbálkozás közül több szempontból is kiemelkedik Gert-Jan Lokhorst nagyszerű munkája.[6] Egyrészt azért, mert tudomásom szerint időben ez a legkésőbbi, s így számot tudott vetni a korábbi tanulmányok hibáival; másrészt pedig azért, mert jól kidolgozott, matematikailag korrekt rendszerbe foglalja a *Tractatus* csaknem teljes rendszerét, az ontológiától a képelméleten és a kijelentések elméletén keresztül egészen a tudatfilozófiai konzekvenciákig. Ez a teljességében felülmúlhatatlan munka is átvesz azonban néhány hiányosságot a korábbi formális rekonstrukcióktól:

1. Lokhorst a tractatusi tárgyak összességét individuumok, individuumtulajdonságok és individuumrelációk osztályaira bontva vezeti be, s ezzel állást foglal a *Tractatus*-irodalom egyik legreménytelenebb vitájában;

2. az egyszerű tárgyak számosságát $\aleph_0$-ban korlátozza (ez Russell Wittgenstein által elvetett végtelenségi axiómájához hasonló megszorítás, csak éppen az ellenkező irányból);

3. csak véges sok tárgy konfigurációját engedi meg az összefüggésekben;[7]

4. az előző két korlátozás következtében $\aleph_0$-ban korlátozza az N művelet lehetséges argumentumainak számát;

5. nem foglalkozik a kijelentésváltozók absztrakciójának módjával, és így naiv módon kezeli az N művelet alkalmazását is;[8]

6. noha nagyon helyesen megengedi, hogy egy kijelentés komponensei között halmazok is legyenek, nem foglalkozik azzal, hogy ennek következtében a tractatusi kijelentésjelek nem értelmezhetők jelek sorozataként, és így a tractatusi nyelv szintaxisa nem tárgyalható a más formális nyelvekben bevett módon, a szintaktikai műveleteket a konkatenációra redukálva;

---

[6] Lokhorst [1988].

[7] E kérdésben Lokhorst figyelmen kívül hagyja többek között a *Tractatus* 4.2211. bekezdését: „Még ha a világ végtelenül bonyolult is, és minden egyes tény végtelen sok összefüggésből áll, az összefüggéseket pedig végtelen sok tárgy alkotja – még akkor is kell lennie tárgyaknak és összefüggéseknek." Azt a lehetőséget persze aligha vehetjük komolyan, hogy minden egyes tény végtelenül sok összefüggésből épül fel, hiszen egyetlen összefüggés megléte is tény. Mindazonáltal Wittgenstein fenntartja mind a végtelen sok tárgyból konfigurálódó összefüggések, mind a végtelen sok összefüggés fennállásából és fenn nem állásából szerveződő tények lehetőségét.

[8] E tekintetben nincs társak nélkül; ld. a 4.6. szakaszt.

7. reflektálatlanul hagyja azokat az előfeltevéseket, amelyek a halmazelméleti eszközök alkalmazásával járnak.

Ezek a korlátozások kényelmessé teszik a rekonstrukció megszerkesztését, de rendkívül problematikusak. Szeretnék emlékeztetni a dolgozatom bevezetésében mondottakra: a logikai rekonstrukciónak nem az az elsődleges feladata, hogy *ad hoc* döntéseket hozzon interpretációs kérdésekben, hanem az, hogy segítsen e döntések meghozatalában azzal, hogy megmutatja, milyen következményekkel járnak az egyes döntési lehetőségek. Fontos eredmény lehet, ha a rekonstrukció egy problémára technikailag lehetséges megoldásokat felmutatva új interpretációs lehetőségeket tud felvetni, vagy technikai értelemben különböző megoldások elkülönítésével rejtett interpretációs döntéseket leplez le. A filozófiai interpretáció és a formális rekonstrukció egymást támogatja. Ugyanakkor a formális rekonstrukció mindig együtt jár nemkívánatos előfeltevésekkel. Kívánatos tehát ezeket az előfeltevéseket a lehető leggyengébbnek megválasztani, és lemondani az erősebb eszközökről, amelyek kényelmesebbé tennék a munkát.

Mindezt igyekeztem tőlem telhető mértékben szem előtt tartani munkám során. A rekonstrukciót két általam fontosnak és szövegértelmezéssel nehezen eldönthetőnek tartott interpretációs kérdés nyitva hagyásával, összesen négy változatban dolgozom ki. A változatok száma további interpretációs döntések figyelembe vételével tovább szaporítható; mindenekelőtt a kijelentésváltozók absztrakciójára az előző fejezetben kidolgozott további eszközök implementálásával. Nem állt szándékomban az összes interpretációs lehetőséget végigvenni; csak szerettem volna néhány példán kipróbálni, hogy miképpen lehet interpretációs lehetőségeket párhuzamosan kezelni. Másfelől a halmazelméleti előfeltevéseket igyekeztem minimálisra szorítani. Erről bővebben a 4.2. szakaszban lesz szó.

A fejezet az alábbiak szerint tagolódik. A 4.3. szakaszban a tractatusi nyelvfelfogás legezoterikusabb sajátosságával, a szintaxis és a szemantika viszonyával foglalkozom. A 4.4. szakaszban négy különböző változatban bevezetem a logikai tér fogalmát. Erre építve a 4.5-4.7. szakaszokban négy változatban felépítek egy logikai nyelvet (vagy legalábbis némi jóindulattal nyelvnek nevezhető rendszert), amely szándékom szerint rendelkezik a tractatusi logikai szimbolika legfontosabb sajátosságaival. Ennek megfelelően a változatokra e logikai szimbolika rekonstrukcióiként fogok hivatkozni. A kapott változatok kifejezőerejét a 4.8. szakaszban egymással, a 4.9. szakaszban pedig más formalizált nyelvekével hasonlítom össze. Mindenekelőtt azonban a 4.2. szakaszban körvonalazni kell azt a keretelméletet, amelyben a következő szakaszok szintaktikai és szemantikai definícióit megfogalmazom. A 4.10. szakaszban axiomatikusan is bevezetem a keretelmélet egy lehetséges változatát. A rekonstrukció néhány filozófiai vonatkozását az 5. fejezet tárgyalja.

4.2. A keretelmélet

Rekonstrukciós vállalkozásunk vállaltan ellentmond a tractatusi közlési normáknak. Egyfelől metanyelven beszélünk a tractatusi nyelvről. Ez a képelmélet értelmében lehetetlenség, hiszen a nyelv és a valóság közös formáját csak felmutatni lehet (4.1212). Másfelől halmazelméleti eszközöket alkalmazunk, és például esetlegesen megválasztott halmazokkal reprezentáljuk a természetes számokat, ami Wittgenstein szerint teljesen haszontalan (6.1). Ezeken a nehézségeken akár azzal is túltehetjük magunkat, hogy a *Tractatus* maga sem különb, amikor például *beszél* a kijelentés általános formájáról ahelyett, hogy hagyná azt *megmutatkozni*; vagy amikor tárgyak, tények, kijelentések összességéről vagy egy változó értékeinek összességéről beszél. E kérdésekre a következő fejezetben még visszatérünk. Most egy további problémára szeretném felhívni a figyelmet.

Ha a tractatusi logikai szimbolikát egy a tractatusiaknál lényegesen gazdagabb előfeltevésekkel terhelt elméletben rekonstruáljuk, akkor ezzel csak azt mutattuk meg, hogy a rendszer a sajátjánál erősebb előfeltevések támogatásával működőképes; azt nem, hogy – amint azt állítja – a maga lábán is megáll. Másfelől viszont néhány külső előfeltevésre mindenképpen szükségünk van a rekonstrukcióban; például egy iterálható osztályfogalomra, amely lehetővé teszi, hogy ne csak dolgok, de osztályok osztályairól is beszélhessünk. E kettős követelménynek csak kompromisszummal tudunk megfelelni: élni fogunk *Tractatus*-idegen előfeltevésekkel, de megpróbáljuk ezeket minimálisra redukálni.

Mindenekelőtt: a tractatusi egyszerű tárgyakat nem osztályokkal, hanem atomokkal[9] fogjuk reprezentálni. Mi több: a tárgyak összességét azonosítjuk az atomok osztályával. Nem követeljük meg, hogy ez halmaz legyen, és a számosságát illetően csak annyi feltevéssel élünk, hogy nem üres. Nem zárjuk ki, hogy tetszőlegesen nagy legyen a számosságuk. A nevektől már nem követeljük meg, hogy atomok legyenek, de nem is zárjuk ki ezt a lehetőséget. Másodszor: teljesen fölösleges volna a végtelen számosságok szokásos végtelen hierarchiájával megterhelni halmazelméletünket. Be fogjuk érni annyival, hogy vannak megszámlálhatóan végtelen osztályok, de azt nem követeljük meg, hogy ezek halmazok legyenek. Harmadszor: az összefüggéseket és az elemi kijelentéseket tárgy-

[9] A halmazelméleti terminológia e ponton meglehetősen vegyes: az atomokat mondják *urelementeknek* is; Ruzsa Imre pedig *ősobjektumokról* beszél. (Ruzsa [1988], 139.o.)

és névsorozatokként reprezentáljuk. Mivel szükségünk lesz arra, hogy összefüggések és kijelentések osztályairól beszéljünk, megköveteljük, hogy ezek a sorozatok halmazok legyenek. Ugyanakkor nem zárjuk ki a végtelenségüket. Azt is megengedjük, hogy az összefüggések összessége valódi osztály legyen.

Mivel sokszor nem lehetünk biztosak abban, hogy halmazzal vagy valódi osztállyal dolgozunk-e éppen, Neumann-Bernays-Gödel (*NBG*) stílusú, osztályrealista halmazelméletet fogunk használni. Ennek nem pusztán kényelmi okai vannak. Ha egy Zermelo-Fraenkel stílusú halmazelméletben általános állításokat akarunk tenni valódi osztályokról, ki kell lépnünk az elsőrendű nyelvi keretek közül, és vagy másodrendű, vagy metanyelvi (esetünkben tehát meta-metanyelvi) formulákban kell fogalmaznunk. Ezt pedig mindenképpen szeretnénk elkerülni.

A 4.10. szakaszban be fogunk vezetni egy viszonylag gyenge *NBG*-stílusú atomos elméletet, és némi munkával bebizonyítjuk róla, hogy szavatolja a hereditáriusan véges halmazuniverzum létezését, tehát megfelel a keretelmélettel szemben megfogalmazott elvárásainknak. Most csak a legfontosabb kérdésekre szorítkozunk.

Bár halmazelméletünktől nem követeljük meg a jólfundáltságot, csak jólfundált halmazokkal és osztályokkal fogunk dolgozni. Ezt a továbbiakban nem mindig fogjuk külön jelezni. Mivel nem tételezzük fel a végtelen számosságok végtelen hierarchiáját, nem támaszkodhatunk sem arra, hogy minden halmaz hatványosztálya halmaz, sem pedig arra, hogy minden halmaz unióosztálya halmaz. (Lásd a 4.10. szakasz utolsó négy megjegyzését.) Csak arra a gyengébb, az unióaxióma nélkül is bizonyítható állításra hagyatkozunk, hogy ha egy x halmaz elemeit felülről korlátozza egy halmazszámosság, akkor $\bigcup x$ halmaz. Ha csak véges sok végtelen számosság van, akkor ez a megkötés magától teljesül minden halmazra. Ha végtelen sok végtelen számosság van, akkor nem jelent túl nagy korlátozást egy adott halmaz esetében ilyen megkötéssel élni. A rendszer felépítésének egyetlen pontján fogjuk kihasználni ezt a lehetőséget. Ha a halmazelméletet kibővítenénk az unió-axiómával, akkor nem lenne szükség a megkötésre. Ez elegánsabbá tenné a rekonstrukciót, de kevésbé elegáns halmazelméleti keretek között.

Mivel az *NBG*-stílusú atomos halmazelméleti keretek még jóindulattal sem tekinthetők közkeletűnek, szükséges némi előzetes fogalommagyarázat. Elméletünkben nem minden individuum osztály. Atomként hivatkozunk azokra az individuumokra, amelyek nem osztályok; halmazokként pedig azokra az osztályokra, amelyek elemei más osztályoknak. Valódi osztályok azok az osztályok, amelyek nem halmazok. Az atomokat, a halmazokat és a valódi osztályokat egyaránt individuumokként kezeljük. Érdemes bevezetnünk még egy megkülönböztetést, amelynek csak jólfundált osztályokon van értelme.

Tisztának mondjuk azokat az osztályokat, amelyek leszálló ágaiban (tehát elemeik, elemeik elemei, azok elemei stb. között) nem szerepelnek atomok. A rendszámok például tiszta osztályok. *Atomosnak* azokat az osztályokat mondjuk, amelyek leszálló ágaiban nem szerepel az üres halmaz. Atomos osztályra példa mindenekelőtt maga az atomok `At` osztálya. Végül *vegyesnek* azokat az osztályokat mondjuk, amelyek se nem tiszták, se nem atomosak. Vegyes osztályok például a rendszámokat az `At` osztályba leképező függvények.

Az osztályokat általában az $\{x : \phi(x)\}$ osztályabsztrakcióval vezetjük be, ahol x megengedett értékei atomok és halmazok, és $\phi(x)$-ben csak atomokra és halmazokra korlátozott kvantifikáció szerepel. Megengedjük, hogy x helyén összetett kifejezés legyen: $\{t(x) : \phi(x)\}$ a $\{y : \exists x(y = t(x) \,\&\, \phi(x))\}$ kifejezést rövidíti. Ezek az absztrakciók a Zermelo-Fraenkel halmazelméletben és rokonaiban nem megengedettek; az *NBG* stílusú elméletekben viszont igen.

A fentebbi fogalmakon kívül támaszkodni fogunk még számos további standard halmazelméleti eszközre: ismertnek tekintjük és a szokásos értelemben fogjuk használni például a *függvény*, a *függvénykompozíció*, a *rendszám*, a *jólrendezés* és a *rendezett n-es* fogalmát és az ezekkel kapcsolatos alapvető jelöléseket. Az utóbbi azonban megkülönböztetett figyelmet érdemel, mert több hasonló jelölést is fogunk használni. Vegyük ezeket sorra a keveredések elkerülése végett! $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ a szokásos Kuratowski-féle definícióval bevezetett rendezett n-est jelöli:

$$\langle x_0, x_1\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\{x_0\}, \{x_0, x_1\}\Big\}$$

$$\langle x_0, \ldots, x_{n+1}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big\langle \langle x_0, \ldots, x_n\rangle, x_{n+1}\Big\rangle$$

E definíciónak két korlátja is van.

Az egyik az, hogy nem terjeszthető ki transzfinit elemsorozatokra. Az utóbbiakat a rendezett n-esekével inkompatibilis definícióval vezetjük be. Ha α rendszám, $\langle x_\beta\rangle_{\beta<\alpha}$ egy α-tagú jólrendezett elemsort jelöl, amelynek x_β tetszőleges eleme. Ezt függvényként definiáljuk, amely az α rendszámot képezi le abba az X osztályba, amelyből a sorozat tagjai kikerülnek:

$$\langle x_\beta\rangle_{\beta<\alpha} : \alpha \longrightarrow X$$

– ahol

$$x_\beta = \langle x_\beta\rangle_{\beta<\alpha}(\beta)$$

Mivel a véges rendszámokat azonosítjuk a természetes számokkal, véges esetben a jelölés $\langle x_i\rangle_{i=0}^n$ lesz. Ez nem azonos $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$-nel (előfordulhat például, hogy az utóbbi atomos, míg az előbbi vegyes); de mivel triviálisan megfeleltethetők egymásnak, értelemszerűen mindegy, melyiket használjuk.

A másik korlát az, hogy a Kuratowski-definícióval valódi osztályokból nem tudunk rendezett n-est képezni. Erre is van azonban lehetőség a diszkrét unióképzéssel. Az ilyen rendezett n-est Morse-n-esnek nevezzük. Meghatározása:

$$\langle\!\langle X_0, \ldots, X_n \rangle\!\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ \langle 0, x \rangle : x \in X_0 \Big\} \cup \ldots \cup \Big\{ \langle n, x \rangle : x \in X_n \Big\}$$

Az elemsor mindhárom fogalma kielégíti azt a kritériumot, hogy két elemsor akkor és csak akkor azonos, ha az azonos helyen szereplő tagjaik páronként azonosak.

4.3. Szintaxis és szemantika viszonya

A tractatusi logikai szimbolika egyik legszokatlanabb sajátossága, hogy csak a szemantikájával párhuzamosan határozhatjuk meg a szintaxisát. Az elemi kijelentések jólformáltságának ugyanis az a feltétele, hogy legyen olyan lehetséges összefüggés, amelyet leképeznek; márpedig ez szemantikai kérdés. A logikai tér a szemantikai lehetőségek tere, de ez feszíti ki a szintaktikai lehetőségek terét is. Mivel pedig a tractatusi összefüggések tárgyak konfigurációi, az elemi kijelentések jólformáltságának eldöntéséhez a bennük szereplő nevek jelöletét is ismernünk kell. A nyelv szintaxisával együtt tehát a nevek (az egyedüli nem-logikai konstansok) interpretációját is meg kell adnunk. Az interpretáció nem utólag kapcsolódik egy, szintaktikai értelemben már kész nyelvhez. Ugyanakkor ez még csupán előzetes interpretáció, hiszen nem dönt a kijelentések igazságáról vagy hamisságáról. A kijelentések igazsága már nem csak a lehetséges konfigurációkon múlik, hanem azon is, hogy ezek közül melyek realizálódnak a világban.

A tractatusi nyelvhez tehát három lépésben lehet modellt megadni:

1. a logikai tér rögzítése;
2. a nevek szemantikai értékének megadása;
3. a fennálló összefüggések kijelölése.

A szintaxist az első lépés után, a másodikkal együtt, de még a harmadik előtt tudjuk bevezetni. Hozzávetőlegesen szólva: az interpretáció első két lépése még csak azt érinti, hogy milyen *lehet* a világ; a harmadik már abban dönt, hogy *ténylegesen* milyen.

Mind a formalizált, mind a természetes nyelvek esetében kézenfekvő és általánosan elfogadott elvárás, hogy a szintaxist a szemantikától független rendszerként kezeljük. A tractatusi logikai szimbolika esetében nem tudunk ennek az elvárásnak eleget tenni. Ez nem a rekonstrukció esetlegessége. Része a *Tractatus* nyelvkoncepciójának; velejárója a nevezetes tézisnek, amely szerint „[*n*]*yelvem határai* világom határait jelentik” (5.6). A témára még visszatérünk az 5.4. szakaszban.

4.4. A logikai tér

A logikai tér fogalmát négy különböző változatban vezetjük be, amelyek a tractatusi ontológia különféle interpretációs lehetőségeihez illeszkednek. Két változatban csupán véges sok tárgyból összetett összefüggéseket engedünk meg, kettőben viszont végtelen sok tárgyból összetetteket is. Mind a véges, mind a végtelen összetettséget megengedő változatokból kidolgozunk egy olyat, amely a tractatusi ontológia nominalista olvasatához illeszkedik, valamint egy másikat, amely a realista olvasathoz illeszkedik. Végül számot vetünk a realista olvasat egy erős változatával is.

A tárgyalt változatok mindegyikében közös lesz a tractatusi tárgyak $\mathtt{G}$-vel jelölt összessége. Ez definíció szerint egybeesik az atomok osztályával:

$$\mathtt{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{At}$$

Az atomok osztályáról pedig semmi mást nem tudunk, mint hogy nem üres. (Ezt axiómának vesszük a 4.10. szakaszban.) Lehet, hogy halmaz; de az is lehet, hogy valódi osztály.

A változatok az összefüggések meghatározásában eltérnek; ennek ellenére a logikai tér mind a négy változatban a tárgyak és az összefüggések osztálya által alkotott $\langle\!\langle \mathtt{G}, \mathtt{SV} \rangle\!\rangle$ Morse-pár lesz. Ez a választás annyiban önkényes, hogy mint látni fogjuk, a tárgyakhoz formát rendelő $\mathtt{form}$ függvény és az összefüggések $\mathtt{SV}$ osztálya kölcsönösen meghatározza egymást, tehát használhattuk volna a $\langle\!\langle \mathtt{G}, \mathtt{form} \rangle\!\rangle$ párt is. A nominalista és a realista verziók közötti stratégiai különbség abban áll, hogy az előbbiekben $\mathtt{SV}$-t használjuk $\mathtt{form}$ definiálására, míg az utóbbiban fordítva.

Mindegyik változatban élni fogunk továbbá két megkötéssel. Az első az, hogy minden tárgy szerepeljen legalább egy összefüggésben; tehát ne legyenek izolált tárgyak (2.011). Ez meglehetősen természetes követelmény, ha egyszer a tárgyakat akarjuk megtenni a világ szubsztanciájának (2.021). Miután kikötöttük, hogy a tárgyak osztálya nem üres, ebből már következik, hogy a logikai tér sem üres. A második az, hogy az egyező formájú tárgyak osztályainak méretét felülről korlátozza egy halmazszámosság. Erre a megkötésre tisztán technikai okokból van szükség; szövegszerűen nem lehet megindokolni. A kijelentések és a kijelentésváltozók konstrukciójában használjuk majd ki.

Végtelen nominalista változat

Ebben a változatban a tárgyakat nem osztjuk fel előzetesen individuumokra, tulajdonságokra és relációkra. Az egyetlen relációnak a tárgyak összefüggésekben való összekapcsolódásának relációját tekintjük; ez azonban a tractatusi értelemben formális reláció, tehát nem tárgy. Nem zárjuk ki, hogy egy-egy összefüggést tetszőlegesen sok tárgy konfiguráljon; azt viszont szeretnénk fenntartani, hogy a tárgyaknak az összefüggésekben meghatározott helye legyen. Az összefüggéseket ezért tetszőlegesen hosszú, de legalább kéttagú jólrendezett tárgysorozatokként értelmezzük (hosszuk tehát egy $\alpha \geq 2$ rendszám). Az összefüggések $\mathtt{SV}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{n}}$ osztályáról így a következőt tudjuk:

$$\mathtt{SV}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{n}} \subseteq \{s : (\exists \alpha \geq 2) s : \alpha \longrightarrow \mathtt{G}\}$$

Az összefüggések tehát a 4.2. szakaszban $\langle g_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$-val jelölt α-tagú tárgysorozatok közül kerülnek ki. Egy tárgy többször is előfordulhat egy összefüggésben. Egy összefüggés soha nem valódi osztály, hiszen az értelmezési tartománya halmaz. Ezért aztán van értelme összefüggések osztályairól beszélni.

Az izolált tárgyakat kizáró megkötés az alábbi formát ölti: ha $g \in \mathtt{G}$, akkor van olyan $S \in \mathtt{SV}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{n}}$, amelyre $g \in \mathtt{Rng}(S)$. Vagy tömörebben:

$$\mathtt{G} = \bigcup_{s \in \mathtt{SV}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{n}}} \mathtt{Rng}(s)$$

Most néhány lépésben bevezetjük a tárgyak formáit. Mindenekelőtt bevezetünk egy jelölést arra, amikor tractatusi tárgyak valamely jólrendezett sorozata legfeljebb valamely g és g' tárgyak előfordulásaiban tér el egymástól. Legyen $g \in \mathtt{G}$, $g' \in \mathtt{G}$, $\alpha \geq 2$ rendszám, továbbá $f : \alpha \longrightarrow \mathtt{G}$ és $f' : \alpha \longrightarrow \mathtt{G}$! Ekkor

$$f\ [g \leftrightarrow g']\ f' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big(\forall \beta < \alpha\Big)\Big(f(\beta) \neq f'(\beta) \supset \Big(f(\beta) \in \{g, g'\}\ \&\ f'(\beta) \in \{g, g'\}\Big)\Big)$$

Általában abból, hogy $s\ [g \leftrightarrow g']\ f$ és $s \in \mathtt{SV}$, még egyáltalán nem következik, hogy $f \in \mathtt{SV}$. Ha viszont valamely g és g' tárgyakra ez mindig teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a két tárgy formája megegyezik:

$$g =_{\mathtt{form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{n}}} g' \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big(\forall s \in \mathtt{SV}\Big)\Big(\forall f : \mathtt{Dom}(s) \longrightarrow \mathtt{G}\Big)\Big(s\ [g \leftrightarrow g']\ f \supset f \in \mathtt{SV}\Big)$$

Ez a reláció nyilvánvalóan reflexív, szimmetrikus és tranzitív, tehát ekvivalenciaosztályokra osztja a tárgyak $\mathtt{G}$ osztályát. Most már meg tudjuk fogalmazni a második, az egyező formájú tárgyak ekvivalenciaosztályaira vonatkozó megkötésünket is: van egy $\kappa \in \texttt{Card}$ számosság,amelyre teljesül, hogy minden $g \in \texttt{G}$-re

$$|\{g' : g' \in \texttt{G} \;\&\; g =_{\texttt{form}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}}} g'\}| \leq \kappa$$

A megkötésből közvetlenül következik, hogy az ekvivalenciaosztályok halmazok.

Egy tárgy formáját azonosítjuk a vele megegyező formájú tárgyak osztályával. A formák osztálya tehát az ekvivalenciaosztályok osztálya:

$$\texttt{Form}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{h : (\exists g \in \texttt{G}) : h = \{g' : g' \in \texttt{G} \;\&\; g =_{\texttt{form}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}}} g'\}\right\}$$

Ha nem kötöttük volna ki, hogy az ekvivalenciaosztályok halmazok, nem tudhatnánk biztosan, létezik-e ez az osztály. A következő lépés a tárgyakhoz formát rendelő $\texttt{form}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}}$ függvény meghatározása:

$$\texttt{form}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}} : \texttt{G} \longrightarrow \texttt{Form}$$

$$\texttt{form}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \{g' : g' \in \texttt{G} \;\&\; g =_{\texttt{form}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}}} g'\}$$

Bevezetjük az összefüggések formáit is. Ezt is tehetnénk ekvivalenciaosztályokkal, de egyszerűbb megoldást fogunk választani. Mivel az összefüggés tárgyak sorozata, logikai formáját tekinthetjük a bennük szereplő tárgyak formáiból képzett sorozatnak. Ha $s \in \texttt{SV}^{\texttt{f}}_{\texttt{n}}$, akkor

$$\texttt{svform}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \texttt{form}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}} \circ s$$

Végül a logikai tér meghatározása:

$$\texttt{LR}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle \texttt{G}, \texttt{SV}^{\texttt{i}}_{\texttt{n}} \rangle\!\rangle$$

Véges nominalista változat

Az összefüggések $\texttt{SV}^{\texttt{f}}_{\texttt{n}}$ osztálya ebben a változatban tárgyak n-tagú rendezett sorozataiból áll. Hogy az előző szakaszbeli végtelen változattal összhangban legyünk, nem a Kuratowski-n-eseket használjuk, hanem a rendszámokhoz való hozzárendelést (lásd a 4.2. szakaszt). Az összefüggések tehát $\langle g_i \rangle_{i=0}^{n}$ alakúak, ahol n 1-nél nagyobb természetes szám. A további meghatározások teljesen megegyeznek az előző szakaszbeliekkel. Csak a logikai térre vonatkozót ismételjük meg:

$$\texttt{LR}^{\texttt{f}}_{\texttt{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle \texttt{G}, \texttt{SV}^{\texttt{f}}_{\texttt{n}} \rangle\!\rangle$$

Végtelen realista változat

A nominalista változatokban az összefüggések határozták meg a tárgyak formáját. A realista változatokban fordítva járunk el. Mindenekelőtt bevezetjük a tárgyak lehetséges formáit.

1. $\iota \in \mathtt{Form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}$ az individuumok formája;
2. Ha α tetszőleges 0-nál nagyobb rendszám és $f : \alpha \longrightarrow \mathtt{Form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}$, akkor $f \in \mathtt{Form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}$ olyan α-argumentumú relációk formája, amelyeknek β-adik argumentuma $f(\beta)$ (ahol $\beta < \alpha$).

Néhány példa formákra: $\Big\{\langle 0, \iota\rangle\Big\}$ az individuumtulajdonságok, $\Big\{\langle 0, \iota\rangle, \langle 1, \iota\rangle\Big\}$ a binér individuumrelációk, $\Big\{\langle 0, \{\langle 0, \iota\rangle\}\rangle\Big\}$ pedig az individuumtulajdonságok tulajdonságainak formája; $\Big\{\langle 0, \{\langle 0, \iota\rangle\}\rangle, \langle 1, \iota\rangle\Big\}$ individuumtulajdonságok és individuumok binér relációinak típusa; az $f : \alpha \longrightarrow \{\iota\}$ konstans függvény az α-argumentumú individuumrelációk formája. (0-argumentumú relációkat nem engedünk meg. Erre a kérdésre nemsokára visszatérünk az erősebb realista változatok kapcsán.)

Legyen mármost

$$\mathtt{form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}} : \mathtt{G} \longrightarrow \mathtt{Form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}$$

a tárgyakhoz formát rendelő függvény! Ez fogja meghatározni a lehetséges összefüggéseket. De előbb hasznos bevezetni egy egyszerű *ad hoc* jelölést. Ha β rendszám, akkor

$$\beta_{[+]} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \beta + 1, \text{ ha } \beta < \omega; \\ \beta \text{ máskor.} \end{cases}$$

Ezzel a művelettel tudunk helyet üríteni az argumentumok sorozatának elején a reláció számára.[10]

Most már meg tudjuk határozni a lehetséges összefüggéseket:

$$\mathtt{SV}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{s : (\exists \alpha \alpha \geq 1)\Big(s : \alpha_{[+]} \longrightarrow \mathtt{G} \;\&\; \mathtt{form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}(s(0)) : \alpha \longrightarrow \mathtt{Form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}} \;\&$$

$$\& \; (\forall \beta < \alpha)\mathtt{form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}(s(0))(\beta) = \mathtt{form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}(s(\beta_{[+]}))\Big)\Big\}$$

A kissé komplikált meghatározás magyarázata: legyen s tárgyak $\alpha_{[+]}$-tagú jólrendezett sorozata! s akkor és csak akkor összefüggés, ha

[10] A matematikai folklórban „Hilbert Szálló”-ként ismert hasonlattal élve: eggyel odébbköltöztetjük az argumentumokat, és így a 0. szoba megürül. Mivel ω limeszrendszám, az ω-adik szoba lakóját már nem kell elköltöztetni.

1. s első tagja α-argumentumú reláció;
2. s $\beta_{[+]}$-adik tagja alkalmas az utolsó tag β-adik argumentumának.

A nominalista változatokkal teljes összhangban fogalmazhatjuk meg obligát megkötéseinket. Egyfelől kizárjuk az izolált tárgyakat:

$$\mathtt{G} = \bigcup_{s \in \mathtt{SV}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}} \mathtt{Rng}(s)$$

Másfelől megköveteljük, hogy az egyező formájú tárgyak osztályait felülről korlátozza egy halmazszámosság: van egy olyan $\kappa \in \mathtt{Card}$, hogy ha $g \in \mathtt{G}$, akkor

$$|\{g' : g' \in \mathtt{G} \; \& \; \mathtt{form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}(g) = \mathtt{form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}(g')\}| \leq \kappa$$

(Mivel a tárgyak formáit már bevezettük, nincs szükség arra, hogy ezeket azonosítsuk az ekvivalenciaosztályokkal.)

Az összefüggések logikai formáit is a nominalista változattal összhangban vezetjük be: ha $s \in \mathtt{SV}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}$, akkor

$$\mathtt{svform}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{form}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}} \circ s$$

Végül a logikai tér definíciója a korábbi változatokkal összhangban:

$$\mathtt{LR}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle \mathtt{G}, \mathtt{SV}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}} \rangle\!\rangle$$

Véges realista változat

Ez a változat annyiban tér el az előző szakaszban bevezetettől, hogy csak véges argumentumú első- és magasabbrendű relációkat engedünk meg az összefüggésekben: $Form^i_r$ definíciójában kikötjük, hogy $\alpha \in \omega$. Minden további a végtelen változattal összhangban alakul. Az összefüggések $\langle g_i \rangle_{i=0}^{n}$ alakú rendezett tárgysorozatok.

Csak a logikai tér meghatározását ismételjük meg:

$$\mathtt{LR}^{\mathtt{f}}_{\mathtt{r}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle \mathtt{G}, \mathtt{SV}^{\mathtt{f}}_{\mathtt{r}} \rangle\!\rangle$$

Elvetett erősebb realista változatok

A véges realista változat formái standard logikai típusoknak felelnek meg: $\Big\{\langle 0, \iota \rangle\Big\}$ például a Church-féle típusjelölés szerinti $o\iota$-nak, $\Big\{\langle 0, \iota \rangle, \langle 1, \iota \rangle\Big\}$ az $o\iota\iota$ típusnak, $\Big\{\langle 0, \{\langle 0, \iota \rangle\}\rangle\Big\}$ $o(o\iota)$-nak, $\Big\{\langle 0, \{\langle 0, \iota \rangle\}\rangle, \langle 1, \iota \rangle\Big\}$ pedig $o(o\iota)\iota$-nak.[11] Megfigyelhetjük, hogy

[11] Az említett típusok az e, t-jelölésben rendre: $\langle e, t \rangle$, $\langle e, \langle e, t \rangle\rangle$, $\langle\langle e, t \rangle, t \rangle$, illetve $\langle e, \langle\langle e, t \rangle, t \rangle\rangle$.

csak az olyan standard típusoknak felelnek meg tractatusi formák, amelyek o-kimenetűek, de nem o-bemenetűek.[12] Így felmerül a formák rendszerének két lehetséges bővítése.

Egyfelől: miért ne engedhetnénk meg olyan formájú tárgyakat, amelyek o-nak vagy o-bemenetű standard típusoknak felelnek meg? Az oo típus megfelelői például az összefüggések tulajdonságai lehetnének. Ez a tisztán technikai szempontból vonzó lehetőség azonban egészen alapvető tractatusi normákat sértene; mindenekelőtt semmibe venné az összefüggések és a tárgyak közötti alapvető kategoriális különbséget, amelynek következtében az elemi kijelentések nem igazságértékek nevei, ahogy azt Frege elgondolta, hanem összefüggések képei (vö. pl. 3.143). Ami pedig az o típusú tárgyakat illeti, amelyek egymagukban is összefüggések volnának: ha volnának ilyenek, nem lehetne megkülönböztetni azt az esetet, amikor fennállnak, és azt, amikor nem. Ráadásul az egyetlen névből álló elemi kijelentést, amely egy ilyen összefüggést leképez, bajosan lehetne képnek nevezni, hiszen nem tagolt (vö. 3.341).

Másfelől: miért ne engedhetnénk meg olyan formájú tárgyakat, amelyek o-bemenetű standard típusoknak felelnek meg? Az $\iota\iota$ típus megfelelői az egyargumentumú individuumfüggvények mint tractatusi tárgyak volnának. Ezzel azonban összetett tárgyak jelennének meg a tractatusi ontológiában, éspedig teljesen más értelemben, mint amelyben a *Tractatus* a komplexumokról ír. A tractatusi komplexumok egyszerű tárgyak elemi vagy logikailag összetett konfigurációi; létezésük tény, amit elemi vagy összetett kijelentéssel fejezhetünk ki a nyelvben. egy $\iota\iota$ formájú g tárgy és egy ι formájú g' tárgy kapcsolódásából létrejött $g(g')$ tárgy azonban maga is ι formájú lenne; létezését nem tudnánk kijelentéssel állítani, az csak megmutatkozhatna egyes, a g és g' neveit tartalmazó kijelentésekben.

Tehát ebben a változatban olyan objektumok jelennének meg, amelyek formájukat tekintve a tárgyakkal vannak egy kategóriában, de nem egyszerűek. Ez nem azért problematikus, mert a *Tractatus* nem tesz ilyenekről említést, hanem azért, mert nem fér el az egyszerűség és az összetettség tractatusi dichotómiájában. Ez elégséges ok arra, hogy elvessük ezt az erős realista változatot is.

4.5. Elemi kijelentések és kijelentésváltozók

A nevek és egyéb jelek ontológiai státusza meglehetősen problematikus; a *Tractatus* ide vonatkozó bekezdéseit nehéz egységesen értelmezni. Nem vállaljuk az egyes bekezdések

[12] Egészen pontosan: hereditáriusan o-kimenetűek és hereditáriusan nem o-bemenetűek.

és lehetséges értelmezéseik szétszálazásának nehézségét, mert a megoldás nem érinti rekonstrukciós vállalkozásunk lényegét. Ugyanakkor eltekintünk két kínálkozó olcsó megoldástól is. Az egyik az, hogy a neveket tárgyaknak tekintsük; a másik az, hogy specifikálatlanul hagyjuk, milyen objektumok reprezentálják a neveket keretelméletünkben. Az első megoldás nagyon erős interpretációs elkötelezettséget jelentene (és nagy valószínűséggel rosszat; lásd az 5.3.szakaszt). A második viszont azzal a veszéllyel járna, hogy olyan objektumokat választunk nevek gyanánt, amelyeket más célra már felhasználtunk.

Viszonylag veszélytelen és vállaltan rossz megoldással a neveket az általuk képviselt tárgyak egyelemű halmazaival reprezentáljuk:

$$\mathtt{N} \overset{\text{def}}{=} \Big\{ \{g\} : g \in \mathtt{G} \Big\}$$

A nevek $\mathtt{N}$ osztálya így definíció szerint ekvivalens a tárgyak osztályával. A két osztály közötti triviális bijekció a ϱ interpretációfüggvény:

$$\varrho : \mathtt{N} \xrightarrow{\mathtt{bij}} \mathtt{G}$$

$$\varrho(\{g\}) \overset{\text{def}}{=} g$$

Az interpretáció tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a nevek és a tárgyak osztálya között; minden tárgynak pontosan egy neve van. Az interpretáció itt nem két egymástól függetlenül adott osztály között biztosít kapcsolatot, hanem elválaszthatatlan tartozéka a névnek. Még egyszer hangsúlyozzuk: a *Tractatus*ban a szintaxis nem független a szemantikától.

Az alábbi meghatározásokban támaszkodni fogunk a `form` és az `SV` négy különböző változatára. E változatok a bevezetett fogalmakat is négy változatban állítják elő. E változatokat később indexek használatával meg is fogjuk különböztetni. Egyelőre elhagyjuk az indexeket, és egységesen adjuk meg a definíciókat.

A tárgyak formája öröklődik a nevek grammatikai formájára:

$$\mathtt{nform}(a) \overset{\text{def}}{=} \mathtt{form} \circ \varrho$$

Egy név formája tehát azonos jelöletének formájával.

Az elemi kijelentések `ES` osztályát ezek után a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\mathtt{ES} \overset{\text{def}}{=} \Big\{ p : (\exists \alpha \geq 2)(p : \alpha \longrightarrow \mathtt{N} \ \&\ \varrho \circ p \in \mathtt{SV}) \Big\}$$

Tehát amennyiben α tetszőleges 1-nél nagyobb rendszám, p pedig α-tagú jólrendezett névsorozat, p akkor és csak akkor elemi kijelentés, ha a benne szereplő nevek jelöleteiből alkotott α-tagú jólrendezett tárgysorozat a lehetséges összefüggések egyike. Magyarán: „A legegyszerűbb kijelentés – az elemi kijelentés – egy összefüggés fennállását állítja.” (4.21)

Természetesen mivel az $\mathtt{SV}$ osztályt négy különböző változatban vezettük be, $\mathtt{ES}$-re is négy különböző változatunk van, amelyeket rendre $\mathtt{ES}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{n}}$, $\mathtt{ES}^{\mathtt{f}}_{\mathtt{n}}$, $\mathtt{ES}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}$ és $\mathtt{ES}^{\mathtt{f}}_{\mathtt{r}}$ jelöl. A véges változatokban természetesen csak véges sok névből álló elemi kijelentéseket kapunk.

Bevezetjük az elemi kijelentések formáját is. Ha $p \in \mathtt{ES}$, akkor

$$\mathtt{esform}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{nform} \circ p$$

Folytassuk a meghatározások sorát az elemi kijelentésváltozókkal! Ezeket ζ-val (ζ'-vel, ζ_1-gyel stb.) jelöljük, és úgy nyerjük őket, hogy egy elemi kijelentésben egy vagy több név-előfordulást változóval helyettesítünk. A kijelentésváltozó értékei kijelentések, amelyeket úgy nyerünk, hogy a változók helyére ismét nevet helyettesítünk; éspedig egyazon változó előfordulásai helyére mindig ugyanazt. A változókat a nevek formáival és az azokból képzett egyszeres, kétszeres stb. szingletonokkal azonosítjuk:

1. $\mathtt{Form} \subseteq \mathtt{Var}$;

2. ha $v \in \mathtt{Var}$, akkor $\{v\} \in \mathtt{Var}$.

Természetesen a változókhoz is rendelhetünk formát:

1. ha $v \in \mathtt{Form}$, akkor $\mathtt{varform}(v) = v$;

2. ha $\{v\} \in \mathtt{Var}$, akkor $\mathtt{varform}(\{v\}) = \mathtt{varform}(v)$.

Az a név akkor és csak akkor helyettesíthető egy elemi kijelentésben a v változóval, ha $\mathtt{nform}(a) = \mathtt{varform}(v)$. Bevezetünk még egy *ad hoc* jelölést, amely leegyszerűsíti a következő meghatározást:

$$\mathtt{F}(h) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathtt{nform}(h), \text{ ha } h \in \mathtt{N}; \\ \mathtt{varform}(h), \text{ ha } h \in \mathtt{Var}. \end{cases}$$

Az elemi kijelentésváltozó meghatározása ezek után: egy

$$\zeta : \alpha \longrightarrow \mathtt{N} \cup \mathtt{Var}$$

leképezés (ahol α tetszőleges rendszám) akkor és csak akkor elemi kijelentésváltozó, ha létezik olyan $p : \alpha \longrightarrow \mathtt{N}$ elemi kijelentés, amelyre teljesül, hogy

$$(\forall \beta < \alpha)\, \mathtt{F}(\zeta(\beta)) = \mathtt{nform}(p(\beta))$$

A kijelentésváltozók is rendelkeznek formával. Ezt az `esvarform` függvény rendeli hozzá a kijelentésváltozóhoz. Ha ζ elemi kijelentésváltozó, akkor

$$\mathtt{esvarform}(\zeta) : \mathtt{Dom}(\zeta) \longrightarrow \mathtt{Form}$$

– és ha $\beta \in \mathtt{Dom}(\zeta)$, akkor

$$(\mathtt{esvarform}(\zeta))(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathtt{F}(\zeta(\beta))$$

Egy ζ elemi kijelentésváltozó értékei olyan p elemi kijelentések, amelyekre teljesül, hogy

1. p formája megegyezik ζ formájával;
2. ahol ζ-ban név szerepelt, ott a p-ben is ugyanaz a név szerepel;
3. egyazon változó két ζ-beli előfordulása helyén p-ben is ugyanaz a név áll.

Vagy szimbólumokban:

$$(\overline{\zeta}) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ p : \mathtt{esform}(p) = \mathtt{esvarform}(\zeta)\ \&$$
$$\&\ \Big(\forall\alpha \in \mathtt{Dom}(\zeta)\Big)\Big(\zeta(\alpha) \in \mathtt{N} \supset p(\alpha) = \zeta(\alpha)\Big)\ \&$$
$$\&\ \Big(\forall\alpha \in \mathtt{Dom}(\zeta)\Big)\Big(\forall\beta \in \mathtt{Dom}(\zeta)\Big)\Big((\zeta(\alpha) \in \mathtt{Var}\ \&\ \zeta(\alpha) = \zeta(\beta)) \supset p(\alpha) = p(\beta)\Big)\Big\}$$

Érdemes megemlíteni két szélsőséges esetet. Ha ζ elemi kijelentésváltozó és $\mathtt{Rng}(\zeta) \subseteq \mathtt{N}$, akkor ζ elemi kijelentés, és egyetlen értéke önmaga (3.313); ha viszont $\mathtt{Rng}(\zeta) \subseteq \mathtt{Var}$, akkor ζ egy alapminta a szó tractatusi értelmében: olyan kijelentés, amelynek az összes tartalmas részét változóval helyettesítettük (3.315).[13]

A következő szakaszban egy nagyon általános kijelentésváltozó-absztrakciós műveletet fogunk használni, amely elemi kijelentések esetében túlbonyolítottnak tűnhet, de hogy megkönnyítsük az általános meghatározást, már itt a végleges formájában vezetjük be. Legyen p tetszőleges elemi kijelentés, α tetszőleges rendszám, és bármely $\beta < \alpha$ esetén legyen adott egy $\langle v_\beta, \zeta_\beta, \langle\epsilon_\delta\rangle_{\delta<\gamma_\beta}\rangle$ rendezett hármas, ahol v_β változó, ζ_β elemi kijelentésváltozó, $\langle\epsilon_\delta\rangle_{\delta<\gamma_\beta}$ pedig egy γ_β-tagú rendszámsorozat, és teljesülnek a következő feltételek:

[13] A terminonógia e ponton sem következetes: más szöveghelyeken Wittgenstein mintha tetszőleges kijelentésváltozót alapmintának tekintene, ha az általánosság jeleként szerepel egy kijelentésjelben (ld. pl. 5.522).

1. bármely $\delta < \gamma_\beta$-ra $\epsilon_\delta < \mathtt{Dom}(\zeta_\beta)$;
2. bármely $\delta < \gamma_\beta$-ra $\mathtt{F}(\zeta_\beta(\epsilon_\delta)) = \mathtt{F}(v_\beta)$!

Ekkor

$$p^{\left\langle \langle v_\beta, \zeta_\beta, \langle \epsilon_\delta \rangle_{\delta < \gamma_\beta} \rangle \right\rangle_{\beta < \alpha}}$$

egy elemi kijelentésváltozó, amelyet a következőkben ζ_p-vel rövidítünk, és a következőképpen határozzuk meg:

1. $\mathtt{esvarform}(\zeta_p) = \mathtt{esform}(p)$;
2. ha $\eta < \mathtt{Dom}(p)$, továbbá nincs olyan $\beta < \alpha$, hogy $p \in (\overline{\zeta_\beta})$ és valamely $\delta \in \gamma_\beta$-ra $\eta = \epsilon_\delta$, akkor $\zeta_p(\eta) = p(\eta)$;
3. ha $\eta < \mathtt{Dom}(p)$, továbbá β a legkisebb olyan rendszám, amelyre $p \in (\overline{\zeta_\beta})$ és valamely $\delta \in \gamma_\beta$-ra $\eta = \epsilon_\delta$, akkor $\zeta_p(\eta) = v(\beta)$.

Következzen egy a lehetőségekhez képest szemléletes magyarázat. $\left\langle \langle v_\beta, \zeta_\beta, \langle \epsilon_\delta \rangle_{\delta < \gamma_\beta} \rangle \right\rangle_{\beta < \alpha}$ változóhelyettesítési minták α-tagú sorozata. Sorra vesszük az egyre nagyobb β-kra e sorozat tagjait. Ha a p kijelentés megfelel valamely ζ_β mintának, akkor megkíséreljük benne alkalmas helyekre behelyettesíteni a v_β változót. E helyek listája a $\langle \epsilon_\delta \rangle_{\delta < \gamma_\beta}$ γ_β-tagú rendszámsorozat. Ha egy adott ϵ_δ helyre korábban már behelyettesítettünk egy változót, akkor azt meghagyjuk; ha még nem, akkor az ott szereplő nevet v_β-ra cseréljük. A változóhelyettesítési mintasorozattal szemben támasztott feltételeink garantálják, hogy a behelyettesítés minden esetben elvégezhető lesz. A $\left\langle \langle v_\beta, \zeta_\beta, \langle \epsilon_\delta \rangle_{\delta < \gamma_\beta} \rangle \right\rangle_{\beta < \alpha}$ művelettel tetszőleges elemi kijelentésváltozó előállítható alkalmasan megválasztott elemi kijelentésből.

Ebben a műveletben a 3.7. szakasz utolsó kijelentésváltozó-absztrakciós műveletének jelentős általánosítását ismerhetjük fel. A következő szakaszban további magyarázattal is szolgálunk.

4.6. Összetett kijelentések és kijelentésváltozók

Most továbblépünk az összetett kijelentésekhez. Összetett kijelentéseket az együttes tagadás N műveletének szukcesszív alkalmazásával kapunk az elemiekből. N argumentuma egy kijelentésváltozó összes értéke. A 3. fejezetben láttuk, hogy a kijelentésváltozók absztrakciója korántsem problémamentes művelet. Több változatot megvizsgáltunk, és egyiket sem találtuk kifogástalannak; ráadásul komoly érvek szóltak amellett, hogy kifogástalan megoldás nem is létezik a problémára. Újabb döntés előtt állunk tehát: melyiket válasszuk a félmegoldások közül? Hogy ne bonyolítsuk el végképp a dolgokat, kompromisszumként azt a megoldást fogjuk választani, amelyik a 3.7. szakaszban a leghatékonyabbnak bizonyult a Geach-i absztrakciós művelet módosításai közül. Ez ugyan nem alkalmas tetszőleges kvantoros szerkezet előállítására, de legalább nem feszíti szét a tractatusi logikai szimbolika kereteit, mint a 3.5. szakaszban vázolt, az N művelet módosításán alapuló megoldási kísérlet, vagy a 3.11. szakasz megoldási kísérlete a mesterséges nevek bevezetésével. Nem volna nehéz az utóbbiakat is a jelen rekonstrukció elméleti kereteihez igazítani; így a logikai szimbolika olyan további rekonstruált változataihoz jutnánk, amelyek hatékonyabbak az általunk választottnál, de csak nehéz szívvel nevezhetnénk őket tractatusinak.

Mielőtt azonban bevezetnénk az összetett kijelentések osztályát, érdemes egy pillantást vetni egy rossz megoldásra.

Egy hibás tractatusi kijelentésfogalom

A 3.9. szakaszban már idézett néhány évvel ezelőtti tanulmányomban az alábbi meghatározást adtam a tractatusi logikai szimbolika kijelentéseinek $\mathtt{S}$ osztályára:[14]

> S az a legszűkebb halmaz, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:
>
> 1. $\mathtt{ES} \subseteq \mathtt{S}$
> 2. Ha $K \subseteq \mathtt{S}$, akkor $N(K) \in \mathtt{S}$
>   ($N(K)$ K elemeinek együttes tagadása.)

A tanulmány 2.5. szakaszában jeleztem, hogy ez csak félmegoldás.[15] Ezt az ítéletet most is megerősítem, és az ott felhozott érveket kiegészítem egy újabbal. Hacsak K-val szemben nem élünk komoly korlátozással, szembe kell néznünk definiálhatatlan elemi kijelentésosztályok együttes tagadásának lehetőségével is. Ez felettébb kétségessé teszi, hogy a kijelentésosztály együttes tagadásával keletkező kijelentés mennyiben nevezhető egyfelől kimondhatónak, másfelől általánosnak – hiszen nem tudunk olyan szabályt megadni, amely a tagadott kijelentésosztályt állítaná elő. Ezt a megoldást már csak ezért is elvetjük, és visszatérünk a kijelentésváltozók absztrakciójának feladatához.

Kijelentésváltozók előállítására tehát a 3.7. szakaszban bevezetett utolsó absztrakciós műveletet fogjuk használni. A művelet általános formája a 3. fejezet kontextusában ez

[14] Mekis [2001b], 256.o.

[15] I.m. 274-276.o.

volt:

$$x/\left\langle k_1 : \phi_1(u_1, \dots, u_n), k_2 : \phi_2(v_1, \dots, v_m), \dots \right\rangle$$

Ez a forma a jelen kontextusban általánosításra és módosításra szorul. Általánosításra azért, mert ezúttal nem feltételezhetjük a kijelentések végességét; módosításra pedig azért, mert egyszerűsíthetjük a dolgunkat, ha a jelöléseket a jelen kontextus igényeihez igazítjuk. Jelen fejezetbeli változatának általános formája ez lesz:

$$\left\langle \langle v_\beta, \zeta_\beta, \langle \epsilon_\delta \rangle_{\delta < \gamma_\beta} \rangle \right\rangle_{\beta < \alpha}$$

– ahol az egyes komponensekre az előző szakasz végén rögzített kikötések érvényesek. Ha ezt a műveletet alkalmazzuk egy ϕ összetett kijelentésre, akkor nem teszünk mást, mint hogy az összes olyan elemi kijelentésre alkalmazzuk, amely komponense ϕ-nek. A kapott kijelentésváltozó értékeit pedig úgy kapjuk meg, hogy a változók helyére neveket helyettesítünk vissza; éspedig egyazon változó előfordulásai helyére mindig ugyanazt. pontos definíciót csak a kijelentések meghatározásával párhuzamosan tudunk adni.

A párhuzamos definícióhoz már csak az N művelet számára kell egy alkalmas reprezentánst találnunk.[16] Szerencsés, ha ez tiszta halmaz lesz, de nem rendszám. A $\{\{\emptyset\}\}$ halmazt még nem használtuk semmire:

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{\{\emptyset\}\}$$

Most már rátérhetünk a kijelentések $\mathtt{S}$ osztálya, a kijelentésváltozók $\mathtt{SVR}$ osztálya, valamint a $\left\langle \langle v_\beta, \zeta_\beta, \langle \epsilon_\delta \rangle_{\delta < \gamma_\beta} \rangle \right\rangle_{\beta < \alpha}$ absztrakciós művelet párhuzamos meghatározására. A kijelentéseket ϕ-vel, a kijelentésváltozókat pedig ξ-vel jelöljük. Az összetett kijelentésváltozók értékeinek összességére megtartjuk a felülvonásos $(\overline{\xi})$ jelölést. Az $\mathtt{SVR}$ osztályon belül elkülönítjük a véges elemfelsorolással megadott kijelentésváltozók $\mathtt{FSVR}$ osztályát, mert ezek a kijelentésváltozók némileg eltérő kezelést igényelnek.

1. $\mathtt{ES} \subseteq \mathtt{S}$;
2. $\mathtt{ESVR} \subseteq \mathtt{SVR}$;
3. ha $\phi_1 \in \mathtt{S}, \dots, \phi_n \in \mathtt{S}$ és $\xi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$, akkor $\xi \in \mathtt{FSVR}$ és $(\overline{\xi}) = \xi$;
4. $\mathtt{FSVR} \subseteq \mathtt{SVR}$;

[16] A kurziválás ezúttal félrevezető; N természetesen konstans. A *Tractatus*-kiadásokban is, a szakirodalomban is kurzív N a bevett jelölés, és e ponton nem volt szívem eltérni a megszokástól.

5. ha $\xi \in \texttt{FSVR}$ és $\xi = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, továbbá $\mu = \langle\langle \upsilon_\beta, \zeta_\beta, \langle\epsilon_\delta\rangle_{\delta<\gamma_\beta}\rangle\rangle_{\beta<\alpha}$ az előző szakasz végén rögzített feltételek szerint adott, akkor

$$(N(\overline{\xi}))^\mu \in \texttt{SVR} \setminus \texttt{FSVR},$$

$$(N(\overline{\xi}))^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \Big\langle N, \{{\phi_1}^\mu, \ldots, {\phi_n}^\mu\}\Big\rangle,$$

$$\Big(\overline{(N(\overline{\xi}))^\mu}\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\langle N, \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}\rangle : \psi_1 \in {\phi_1}^\mu \;\&\; \ldots \;\&\; \psi_n \in {\phi_n}^\mu \;\&$$

$$\&\, (\forall i, j \le n)(\forall \eta_i \in \texttt{Dom}(\psi_i))(\forall \eta_j \in \texttt{Dom}(\psi_j))$$

$$\Big(({\phi_i}^\mu(\eta_i) \in \texttt{Var} \;\&\; {\phi_i}^\mu(\eta_i) = {\phi_j}^\mu(\eta_j)) \supset \psi_i(\eta_i) = \psi_j(\eta_j)\Big)\Big\}$$

és ha

$$\langle N, \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}\rangle \in \Big(\overline{(N(\overline{\xi}))^\mu}\Big)$$

akkor

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \in \texttt{FSVR};$$

6. ha $\xi \in \texttt{SVR} \setminus \texttt{FSVR}$ és $\mu = \langle\langle \upsilon_\beta, \zeta_\beta, \langle\epsilon_\delta\rangle_{\delta<\gamma_\beta}\rangle\rangle_{\beta<\alpha}$ az előző szakasz végén rögzített feltételek szerint adott, akkor

$$(N(\overline{\xi}))^\mu \in \texttt{SVR} \setminus \texttt{FSVR},$$

$$(N(\overline{\xi}))^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\langle N, \psi^\mu\rangle : \psi \in (\overline{\xi})\Big\}$$

és

$$\Big(\overline{(N(\overline{\xi}))^\mu}\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{N(\overline{\psi^\mu}) : \psi \in (\overline{\xi})\Big\};$$

7. ha $\xi \in \texttt{SVR}$, akkor

$$N(\overline{\xi}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle N, \overline{\xi})\rangle$$

és $N(\overline{\xi}) \in \texttt{S}$;

8. semmi más nem eleme $\texttt{S}$-nek és $\texttt{SVR}$-nek.

Ugyanez szavakban:

1. az elemi kijelentések maguk is kijelentések;
2. az elemi kijelentésváltozók maguk is kijelentésváltozók;
3. véges sok kijelentés felsorolásával speciális kijelentésváltozót vezetünk be;
4. a felsorolással megadott speciális kijelentésváltozók maguk is kijelentésváltozók;

5. ha olyan összetett kijelentésre alkalmazzuk az absztrakciós műveletet, amelyben N argumentumai felsorolással vannak megadva, akkor az absztrakció eredményeként kapott kijelentésváltozó értékei a felsorolásban szereplő kijelentések olyan variánsainak együttes tagadásai, amelyeket az absztrakció összehangolt alkalmazásával nyertünk belőlük;

6. ha olyan összetett kijelentésre alkalmazzuk a absztrakciós műveletet, amelyben N argumentumai maguk is egy előző absztrakcióval vannak megadva, akkor a kapott kijelentésváltozó értékeit az N argumentumában szereplő kijelentésekből nyerjük az újabb absztrakcióval;

7. egy kijelentésváltozó összes értékének együttes tagadásával kijelentést kapunk;

8. semmilyen más módon nem kaphatunk kijelentést vagy kijelentésváltozót.

Ez a meghatározás felel meg rekonstrukciónkban a hírhedt tractatusi $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ általános kijelentésformának.

Ismét hangsúlyozzuk, hogy mivel a logikai teret négy különböző változatban vezettük be, az imént definiált fogalmakkal is négy változatban rendelkezünk. A kijelentések osztályának változatai például: $\mathtt{S}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{n}}$, $\mathtt{S}^{\mathtt{f}}_{\mathtt{n}}$, $\mathtt{S}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}$ és $\mathtt{S}^{\mathtt{f}}_{\mathtt{n}}$.

Végezetül tractatusi logikai szimbolikán az

$$\mathbf{L}_{tr} \stackrel{\text{def}}{=} \langle\!\langle \mathtt{N}, \mathtt{ES}, \mathtt{S} \rangle\!\rangle$$

rendezett hármast értjük. Ennek négy változata rendre: $\mathbf{L}_{\mathbf{tr}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{n}}}$, $\mathbf{L}_{\mathbf{tr}^{\mathtt{f}}_{\mathtt{n}}}$, $\mathbf{L}_{\mathbf{tr}^{\mathtt{i}}_{\mathtt{r}}}$ és $\mathbf{L}_{\mathbf{tr}^{\mathtt{f}}_{\mathtt{r}}}$.

4.7. Igazság, tautológia, következmény

A *Tractatus* szerint egy kijelentés akkor és csakis akkor igaz, ha megegyezik a valósággal; a valóság pedig kimerítően jellemezhető a fennálló összefüggések összességével. Az igazság fogalmához tehát szükségünk van a fennálló összefüggések osztályára, vagy ha úgy tetszik, a tractatusi *világ* fogalmára. A fennálló összefüggések W osztályára vonatkozóan semmilyen megkötésünk nincs azon felül, hogy a fennálló összefüggések a lehetséges összefüggések közül kerülnek ki. W-t a metanyelvben változóként kezeljük, hiszen a tautológia és a következményviszony fogalmához az összes lehetséges világot figyelembe kell vennünk. W értékeire tehát a következő megszorítást tesszük:

$$W \subseteq \mathtt{SV}$$

A ϕ kijelentés W melletti igazságértékét $|\phi|_W$-vel jelöljük; magukat az igazságértékeket pedig $\mathtt{i}$-vel és $\mathtt{h}$-val:

1. Amennyiben $p \in \mathtt{ES}$, $|p|_W = \mathtt{i}$ akkor és csak akkor, ha $\varrho \circ p \in W$;
2. amennyiben $\xi \in \mathtt{SVR}$, $N(\overline{\xi})| = \mathtt{i}$ akkor és csak akkor, ha minden $\phi \in (\overline{\xi})$-re $|\phi|_W = \mathtt{h}$.

Az igazságdefinícióra támaszkodva egyszerűen definiálhatók a centrális szemantikai fogalmak is. Ezekre a szokásos jelöléseket alkalmazzuk. Legyen $\phi \in \mathtt{S}$ és $\Gamma \subseteq \mathtt{S}$! Ekkor

1. $\Rightarrow \phi$ akkor és csak akkor, ha bármely $W' \subseteq \mathtt{SV}$-re $|\phi|_W = \mathtt{i}$;
2. $\Gamma \Rightarrow \phi$ akkor és csak akkor, ha bármely $W' \subseteq \mathtt{SV}$-re: amennyiben Γ minden ψ elemére $|\psi|_W = \mathtt{i}$, $|\phi|_W = \mathtt{i}$.

4.8. A változatok viszonya egymáshoz

A tractatusi logikai szimbolikát négy változatban vezettük be. A realista változatokban a nevek grammatikai formája előzetesen adott hierarchiába van rendezve; a nominalista változatokban nem követeltük meg ilyen hierarchia létezését. A végtelen változatokban az elemi kijelentések tetszőlegesen hosszú jólrendezett név-sorozatok lehetnek; a véges változatokban csak véges tárgysorozatokat engedtünk meg. Most ezeket hasonlítjuk össze.

Lássuk először a véges és a végtelen változatok viszonyát! A végtelen változatok értelemszerűen gazdagabbak a végeseknél, hiszen nem tiltják meg, hogy az elemi kijelentések között végesek is legyenek; sőt azt is megengedik, hogy akár minden elemi kijelentés véges legyen. Így a véges változatok gond nélkül beágyazhatók a megfelelő végtelen változatba.

A nominalista változatok is gazdagabbak a realistáknál abban az értelemben, hogy nem zárják ki a realista változatokban szereplő grammatikai kategóriák meglétét. Ha az elemi kijelentések osztályát a realista változatok valamelyikéből minden változtatás nélkül átemeljük a megfelelő nominalista változatba, egyszerűen rekonstruálható lesz a nevek nominalista értelemben vett grammatikai formája. A fordított irányú beágyazást azonban több tényező is akadályozza.

Az első akadály az, hogy egy adott formájú név tetszés szerinti helyeken fordulhat elő kijelentésekben. Például ha a és b tractatusi nevek a nominalista verziók valamelyikében, és mind az ab, mind a ba jelsorozat (pontosabban: $\{\langle 0, a\rangle, \langle 1, b\rangle\}$, illetve

$\{\langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle\}$) értelmes elemi kijelentés, akkor a-t és b-t lehetetlen elhelyezni a realista név-kategóriákban.

A második akadály az, hogy ha mégoly szerencsésen alakul is a nevek helye az elemi kijelentésekben, a nevek kategóriákba sorolása nem egyértelmű. Tegyük fel, hogy a nominalista verzióban a következőképpen alakulnak a viszonyok! Minden elemi kijelentés két vagy három névből áll; a nevek osztálya pedig három ekvivalenciaosztályra bomlik. A $\{P, Q, \ldots\}$ névosztály elemei a két névből álló elemi kijelentések első helyén, $\{R, S, \ldots\}$ elemei három névből álló elemi kijelentések első helyén szerepelnek, az $\{a, b, \ldots\}$ osztály elemei pedig e kijelentések második, ill. második-harmadik helyén. Az e neveket tartalmazó elemi kijelentések tehát Pa, ill. Rab formájúak. Honnan tudhatjuk ilyenkor, hogy a-t az individuumok, P-t az individuumtulajdonságok, R-et pedig a binér individuumrelációk közé kell-e sorolnunk, vagy a éppenséggel individuumtulajdonság, P és R pedig másodrendű tulajdonság, illetve reláció?

A problémát a következőképpen is megfogalmazhatjuk: a nominalista változatokbeli nevek realista kategóriákba sorolása, ha egyáltalán lehetséges, azt a jelenséget mutatja, amit Russell nyomán típusambiguitásnak szokás nevezni: a hierarchia egy adott szintjén megjelenő jelek vagy objektumok ugyanúgy viszonyulnak egymáshoz, mint a bármely más szinten megjelenő jeleké és objektumoké.

Egy evidens megoldás mindenesetre adódik a típusambiguitási problémára: semmi értelme, hogy valamit tulajdonságnak minősítsünk, ha nincs semmi, ami ezzel a tulajdonsággal rendelkezhetne. Az a nevet azért kell az individuumnevek közé sorolni, mert ha a tulajdonságok vagy relációk közé sorolnánk, ilyen képtelen helyzet állna elő.

Ennek kapcsán pedig rámutathatunk a realista változatok egy problémájára: nem éltünk azzal a megkötéssel, hogy ha egy g tárgyra $\texttt{form}(g) : \alpha \longrightarrow \texttt{Form}$, akkor minden $\beta < \alpha$-ra lennie kell egy g' tárgynak, amelyre $(\texttt{form}(g))(\beta) = \texttt{form}(g')$; tehát hogy ha egy relációs forma ekvivalenciosztálya nem üres, akkor argumentumainak ekvivalenciaosztályai sem üresek – vagy szemléletesen fogalmazva: a formák hierarchiája telített. Ez a megkötés felettébb ésszerű. Két okból nem éltem vele: egyrészt azért, mert meg szerettem volna őrizni a változatok egységességét; másrészt azért, mert igyekeztem minimálisra szorítani a korlátozásokat.

Természetesen gond nélkül ki lehet egészíteni a rekonstrukciót ezzel és minden valószínűség szerint számos más megszorítással is. De még egyszer szeretném hangsúlyozni: nem az volt a célom, hogy bemutassam a wittgensteini rendszer helyes interpretációját, hanem hogy technikai eszközöket biztosítsak az interpretációs munka számára.

4.9. A változatok viszonya más logikai nyelvekhez

Az ebben a szakaszban elmondottak rendkívül vázlatosak lesznek. $\mathbf{L}_{tr}$ és a logikában, illetve a formális szemantikában használt számtalan formalizált nyelv viszonyának szisztematikus vizsgálata messze meghaladná e fejezet kereteit. Vizsgálódásainkat az egy- és többszortú klasszikus elsőrendű, magasabbrendű és extenzionális típuselméleti nyelvekre korlátozzuk, és még ebben a körben is csak jelezzük a lehetőségeket és a problémákat.

A szintaxis és a szemantika sajátos viszonya miatt nem könnyű $\mathbf{L}_{tr}$ kifejezőerejét összehasonlítani a megszokott logikai nyelvekével. Ez a kifejezőerő ugyanis részben a logikai tér sajátosságaitól függ. Az elemi kijelentések számát és lehetséges formáit a logikai tér határozza meg. Ha viszont rögzített logikai tér mellett próbáljuk próbára tenni $\mathbf{L}_{tr}$-t más logikai nyelvekkel szemben, akkor a sikeres összehasonlításhoz az utóbbi nyelveket legalábbis részleges interpretációval kell ellátnunk; enélkül a nyelvek közötti fordítások nem lesznek jelentéstartók.

Tekintsük mindenekelőtt az elemi kijelentések lehetséges fordításait! Példaként tekintsük az egyik legegyszerűbb lehetséges esetet: egy Rab elemi kijelentést a realista változatból. Mi ennek a helyes elsőrendű fordítása? Ha kategóriatartó fordítást választunk, és R-et predikátummal, a-t és b-t pedig névkonstanssal adjuk vissza, le kell mondanunk arról, hogy R jelölete öröklődjön a fordításra. R-t interpretálatlanul kell hagyni, hacsak nem akarjuk, hogy a fordítás Rab igazságértékét is rögzítse. R interpretálatlansága mindaddig nem probléma, amíg nem kerül sor valamely FR kijelentés fordítására, ahol F másodrendű tulajdonság neve. Ennek fordítására már sem R, sem F jelölete nem öröklődik; a fordítás tehát nem jelentéstartó.

Természetesen lefordíthatjuk a mondatot többszortú elsőrendű nyelvre is; de ekkor a formák kapcsolata az, ami elvész. A probléma megoldható egy speciális predikátum bevezetésével, amelynek argumentumai a megfelelő szortú kifejezések lehetnek. Rab fordítása így egy $P(r, a, b)$ formula lesz, ahol r, a és b névkonstansok, a P predikátum pedig, ha úgy tetszik, az eredeti Rab kijelentés formájának fordítása. (Annak, hogy a célnyelv többszortú, a fordításban mindaddig nincs jelentősége, amíg csak elemi kijelentéseket fordítunk. Ha azonban a fordítást kiterjesztjük elemi kijelentésváltozókra és összetett kijelentésekre is, így tudjuk rögzíteni a kvantifikációs tartományokat.)

E két fordítási stratégiát nevezhetjük realistának, illetve nominalistának. Segítségükkel a véges realista változatok elemi kijelentései viszonylag biztonságosan lefordíthatók típuselméleti, illetve többszortú elsőrendű nyelvekre. Természetesen a nominalista változatok esetében csak a nominalista stratégia alkalmazható, hiszen ott semmi sem szavatolja, hogy a tárgyak formái megfeleltethetők lennének standard logikai típusoknak.

Az ellenkező irányú fordítás újabb problémákat hoz. Mind az elsőrendű, mind a típuselméleti nyelvek atomi formulái tartalmazhatnak ugyanis változóelőfordulásokat. Hogyan fordítsuk ezeket? Kézenfekvő lehetőség, hogy elemi kijelentésváltozókkal, amelyekben a változóelőfordulásokat tractatusi nevek formái fordítják. Ám ebben a fordításban a különböző változók összemosódnak egy komplex változóvá. Ha egy ilyen kijelentésváltozóra alkalmazzuk az N műveletet, az az összes értéket tagadja, nem csak egy konkrét változóra vonatkozóakat. Erre a jelenségre épült a tractatusi kvantifikáció fogelini kritikája, amellyel a 3.4. szakaszban foglalkoztunk. A későbbi szakaszokban tárgyalt megoldási kísérletek mind e naiv fordítással szemben fogalmazódtak meg.

Térjünk most rá az összetett kijelentések fordítására! A tractatusi kijelentésváltozók értéktartományai meglehetősen komplex halmazok lehetnek, így az N művelet alkalmazásának eredményét még akkor sem mindig tudjuk kvantorokkal vagy lambdaoperátorral reprodukálni, ha az argumentumban szereplő kijelentésváltozó minden értékét sikerrel lefordítottuk. $\mathbf{L}_{tr}$-ben tehát ki lehet fejezni olyan tartalmakat, amelyeket a típuselméleti nyelvekben nem.

Másfelől a 3.7. szakaszban azt láttuk, hogy a tractatusi szimbolika rekonstrukciójában használt változóabsztrakciós művelet még tetszőleges elsőrendű kvantoros szerkezet reprodukálására sem alkalmas: a nem túl komplex $\forall x \exists y Rxy \mathbin{\&} Ryx$ formulának nem tudtuk előállítani a fordítását.[17] Megpróbáltam amellett érvelni, hogy a Wittgenstein által szabott határokon belül maradva nincs is sok remény a hiba orvoslására. Ha viszont egy kissé kitoljuk ezeket a határokat, minden elsőrendű formula fordíthatóságát biztosítani lehet a logikai szimbolika realista változatára. Egy ilyen fordítás körvonalait vázoltam a 3.11. szakaszban. Természetesen analóg megállapításokat tehetünk a típuselméleti nyelvek esetében is; az elsőrendű kvantifikáció problémája akkor és csak akkor megoldható, ha a magasabbrendű kvantifikációé is az. De az eddigiek alapján úgy tűnik: a wittgensteini határok között rekonstruált tractatusi logikai szimbolika kapacitása összetett kijelentések terén bizonyos esetekben nagyobb, más esetekben viszont kisebb, mint a klasszikus elsőrendű és típuselméleti nyelveké.

[17] Az előző fejezetben infix jelölést használtunk, a jelen fejezet korábbi szakaszaiban viszont prefixet. Az utóbbihoz igazítottuk a formulát.

4.10. Függelék: egy minimális keretelmélet

Az alábbiakban bevezetett elmélet egyrészt megköveteli atomok létezését, másrészt biztosítja a hereditáriusan finit halmazok univerzumának létezését, és így alkalmas a fejezetben foglalt szintaktikai és szemantikai feladatokra. Az elmélet előfeltevéseit igyekeztem minimálisra redukálni. A kifejtés terjedelmi okokból rendkívül vázlatos lesz.[18]

Az elmélet kifejtésére azonosságjeles klasszikus elsőrendű nyelvet használunk két nemlogikai konstanssal: a szokásos $\in$ kétargumentumú predikátummal és az egyargumentumú `cl` predikátummal. Közönséges változókként az A, B, C stb. nagybetűket használjuk. Az $A \in B$, illetve a $\mathtt{cl}(A)$atomi formulák szándékolt jelentése: az A individuum eleme a B individuumnak, illetve az A individuum osztály. Az `at`, a `m` és a `pr` egyargumentumú predikátumokat rövidítésként használjuk; Az $\mathtt{at}(A)$, az $\mathtt{m}(A)$ és a $\mathtt{pr}(A)$ atomi formulák szándékolt jelentése rendre: A atom, A halmaz, illetve A valódi osztály. Definícióik:

$$\mathtt{at}(A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sim \mathtt{cl}(A)$$

$$\mathtt{m}(A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathtt{cl}(A) \;\&\; \exists B\, A \in B$$

$$\mathtt{pr}(A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathtt{cl}(A) \;\&\; \sim \mathtt{m}(A)$$

– az atomok azok az individuumok, amelyek nem osztályok; a halmazok olyan osztályok, amelyek elemei más individuumoknak; a valódi osztályok pedig azok az osztályok, amelyek nem halmazok. A nagybetűs X, Y stb. változókat halmazváltozóként vezetjük be különféle kontextusokban – például $\forall X \phi(X) \Leftrightarrow \forall A\Big(\mathtt{cl}(A) \supset \phi(A)\Big)$. Hasonlóképpen a kisbetűs x, y stb. változók értékeit atomokra és halmazokra korlátozzuk: pl. $\forall x \phi(x) \Leftrightarrow \forall A\Big(\sim \mathtt{pr}(A) \supset \phi(A)\Big)$.

Az elmélet axiómái és a szükséges definíciók:

Osztályaxióma: *ACL* Aminek eleme van, az osztály.

$$\forall A\Big(\exists B\, B \in A \supset \mathtt{cl}(A)\Big)$$

Extenzionalitás: *AE* Különböző osztályok terjedelme különböző.

$$\forall X \forall Y\, (\forall z\, (z \in X \equiv z \in Y) \supset X = Y)$$

[18] Az elméletet Randall Holmes *zsebhalmazelmélete* inspirálta, de lényeges pontokon különbözik tőle. Holmes 1. megköveteli végtelen halmazok létezését; 2. $2^{\aleph_0}$-ban felülről korlátozza az univerzum méretét; 3. nem enged meg atomokat; 4. Morse-Kelley stílusú, korlátlan komprehenziós sémát használ. (Holmes [2007].) Az axiómarendszer és egy kivételével a bizonyítások is tőlem származnak. (A legelsőt Bertrand Russelltől kölcsönöztem.)

Komprehenzió: *C* Bármely ϕ formulához, amelyben a kvantifikációból kizártuk a valódi osztályokat, létezik azon atomok és halmazok Y osztálya, amelyek egy adott x változó tekintetében kielégítik a formulát.

$$\exists Y \forall x \, (x \in Y \leftrightarrow \phi)$$

– ahol ϕ-ben csak kisbetős változóknak van kötött előfordulása

Az osztályabsztrakciót a szokásos módon vezetjük be. Példák osztályabsztrakcióra:

$$\mathtt{At} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \mathtt{at}(x)\}$$

$$\mathtt{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \notin x\}$$

$$\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \neq x\}$$

$$\mathtt{R}^{-} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in \mathtt{R} \ \& \ x \neq \emptyset\}$$

$$\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \{y : y = x\}$$

$$\{x, y\} \stackrel{\text{def}}{=} \{z : z = x \vee z = y\}$$

A rendezett párokat Kuratowski-párokként vezetjük be. (A definíció parciális: $\langle x, y \rangle$ csak akkor létezik, ha mind $\{x\}$, mind $\{x, y\}$ halmaz.) A reláció, a függvény, a bijekció, az osztályekvivalencia és a Dedekind-végtelenség fogalmát a szokásos módon, rendezett párokkal definiáljuk. (A definíciók kétszeresen is parciálisak: a definiált objektumok csak akkor léteznek, ha a szükséges párok léteznek *és* nem valódi osztályok. Amíg a párok létezését be nem bizonyítottuk, nem következtethetünk két osztály ekvivalenciájára abból, hogy egy formula kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést biztosít az elemeik között.)

Méretkorlátozási axióma: *AL* Egy osztály akkor és csak akkor valódi osztály, ha minden valódi osztállyal ekvivalens.

$$\forall X \forall Y \Big((\mathtt{pr}\,(X) \ \& \ \mathtt{pr}\,(Y)) \equiv (\mathtt{pr}\,(X) \ \& \ \ X \approx Y) \Big)$$

Atom létezése: *AA* Létezik legalább egy atom.

$$\exists A \, \mathtt{at}(A)$$

Ezzel befejeztük az elmélet kifejtését. Észrevehető, hogy a szokádos halmazlétezési axiómák egy része hiányzik. A *páraxióma* hiánya miatt a komprehenziós sémának az *NBG*-elméletcsaládban szokásos véges feloldása itt nehézségekbe ütközik; ezeket nem részletezzük. A következőkben négy lépésben megmutatjuk, hogy az

$\{ACL, AE, C, AL, AA\}$ axiómaosztályból következik a valódi osztályok végtelensége, és következésképpen a hereditáriusan véges halmazuniverzum létezése.

A *Russell-osztály* valódi osztály.

$$\mathtt{pr}\,(\mathtt{R})$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathtt{R}$ halmaz. Ekkor definíció szerint $\mathtt{R} \in \mathtt{R}$ akkor és csak akkor, ha $\mathtt{R} \notin \mathtt{R}$. Ez ellentmondás.

Az üres osztály halmaz.

$$\mathtt{m}\,(\emptyset)$$

Bizonyítás: Ha $\emptyset$ valódi osztály lenne, akkor AL értelmében ekvivalens, AE miatt pedig azonos lenne $\mathtt{R}$-rel. De AA-nak köszönhetően $\mathtt{R}$ nem üres.

A *Russell-osztály* Dedekind-végtelen.

$$\mathtt{inf}\,(\mathtt{R})$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a fentebb bevezetett $\mathtt{R}^-$ halmaz. Ha mármost $\mathtt{R}^- \in \mathtt{R}^-$, akkor $\mathtt{R}^- \notin \mathtt{R}^-$ és $\mathtt{R}^- \neq \emptyset$, tehát ellentmondásra jutottunk. Ha viszont $\mathtt{R}^- \notin \mathtt{R}^-$, akkor vagy $\mathtt{R}^- \in \mathtt{R}^-$, vagy $\mathtt{R}^- = \emptyset$; tehát hogy elkerüljük az ellentmondást, $\mathtt{R}^- = \emptyset$. De AA-ból következik, hogy $\mathtt{R}^-$ nem üres. Minden irányban ellentmondást találtunk, így le kell mondanunk a feltevésről. Így mind $\mathtt{R}^-$, mind $\mathtt{R}$ valódi osztály, vagyis AL értelmében ekvivalensek. Hovatovább: az előbbi valódi része az utóbbinak. Definíció szerint ez azt jelenti, hogy $\mathtt{R}$ Dedekind-végtelen.

Minden valódi osztály Dedekind-végtelen.

$$\forall X\,(\mathtt{pr}\,(X) \supset \mathtt{inf}\,(X))$$

Bizonyítás: Legyen X valódi osztály. Ekkor AL értelmében létezik egy $F : X \longrightarrow \mathtt{R}$ bijekció. Ebben szerepel egy $\langle x_0, \emptyset\rangle$ pár, valamint $\mathtt{R}^-$ minden r elemére egy $\langle x, r\rangle$ pár. Legyen most $X^- = X \setminus \{x_0\}$ és $F^- = F \setminus \{\langle x_0, \emptyset\rangle\}$. C szerint mindkét osztály létezik. Ráadásul $F^- : X^- \longrightarrow \mathtt{R}^-$ is bijekció. AL értelmében tehát X^- is valódi osztály. Világos, hogy X^- valódi része X-nek; AL egy utolsó alkalmazása pedig megmutatja, hogy létezik egy $G : X \longrightarrow X^-$ bijekció. Ezzel bebizonyítottuk, hogy X végtelen.

Következmények: A véges osztályok halmazok, köztük az egy-és kételeműek is. A rendezett párok léteznek és halmazok. Minden kétváltozós nyitott formula, amelyben csak halmazváltozóknak van kötött előfordulása, definiál egy binér relációt. Minden hereditáriusan véges halmaz létezik. $\mathtt{V}$ valódi osztály.

Megjegyzések

1. Dedekind-végtelen halmazok létezése nem bizonyítható és nem cáfolható. Nem lehet például kizárni, hogy a halmazuniverzum a hereditáriusan véges jólfundált halmazok osztálya. Ugyanakkor semmi nem zárja ki tetszőlegesen nagy számosságú halmazok létezését sem.

2. Nem bizonyítható és nem cáfolható, hogy az atomok halmazt alkotnak. Az atomok osztályának számossága ugyanakkor AL miatt alulról korlátozza a halmazuniverzumét: ha $\mathtt{At}$ halmaz, akkor több halmaz van, mint atom; ha valódi osztály, akkor ugyanannyi.

3. Nem bizonyítható és nem cáfolható, hogy minden halmaz hatványosztálya halmaz. Nem lehet például kizárni, hogy a halmazuniverzum a hereditáriusan megszámlálható halmazok osztálya legyen. Ekkor pl. ω halmaz, de a hatványosztálya már valódi osztály. (A hatványhalmaz létezése természetesen biztosított a véges halmazok esetében.)

4. Nem bizonyítható és nem cáfolható, hogy tetszőleges halmaz unióosztálya halmaz lenne. Ezt a szokásos példával indokolhatjuk. Tegyük fel, hogy az $\aleph_0, \aleph_1, , \ldots$ véges indexű alef-számosságok mindegyike halmaz! Ekkor C miatt létezik ezek $\{\aleph_0, \aleph_1, , \ldots\}$ osztálya, és mivel ez $\aleph_0$ számosságú, AL miatt halmaz lesz. Mármost a $\bigcup\{\aleph_0, \aleph_1, , \ldots\}$ osztály definíció szerint $\aleph_\omega$ lesz; vagyis a felsoroltak mindegyikénél nagyobb számosság. Az unióaxióma nélkül nem bizonyítható, hogy ez is halmaz. (És hasonlóképpen problémát jelent minden $\aleph_0$-nál nagyobb limeszszámosság.)

5. A hatványhalmaz- és az unióaxióma a hereditáriusan megszámlálható halmaztartományban nem változtatna a halmazuniverzumon. A végtelen számosságok szokásos hierarchiájának generálásában van szerepük. Mi erről a két axiómával együtt lemondtunk; ugyanakkor e hierarchia létezése nem cáfolható.

6. Valamely x halmaz $\bigcup x$ unióosztályának halmaz volta bizonyítható akkor, ha egy halmazszámosság felülről korlátozza x elemeit. (Azért nem egyszerűen számosságot mondunk, mert a valódi osztályoknak is van számossága; éspedig az `Ord` osztály.) Tehát:

$$\forall x\Big(\exists\kappa\Big(\kappa \in \mathtt{Card}\ \&\ \forall y(y \in x \supset |y| \leq \kappa)\Big) \supset \mathtt{m}(\bigcup x)\Big)$$

A részletes bizonyításhoz be kellene vezetni a számosságok aritmetikáját. A gondolatmenet magja a következő: $|\bigcup x| \leq |x| \cdot \kappa$; ha x és κ véges, akkor $|x| \cdot \kappa$ is véges; ha valamelyik végtelen, akkor $|x| \cdot \kappa = \mathtt{max}(|x|, \kappa)$. Tehát $\bigcup x$ vagy véges, vagy ekvivalens egy halmazzal; de halmazokkal AL miatt csak halmazok lehetnek ekvivalensek.

5. fejezet

Megjegyzések a rekonstrukcióhoz

5.1. Bevezetés

E fejezetben néhány filozófiai kérdést szeretnénk megvizsgálni, amelyek az előző fejezetben kidolgozott rekonstrukcióval kapcsolatban merülnek fel, de tárgyalásuk meghaladta a fejezet kereteit. Sem a kérdések kiválasztásában, sem a megtárgyalásukban nem törekedtem a teljességre.

5.2. A logikai tér értelmezései

A logikai tér metaforájára több egymással összeegyeztethetetlen értelmezés született a *Tractatus* irodalmában. A két nagy klasszikus kommentár annyiban még egyetért, hogy mindkettő az analitikus geometria derékszögű koordinátarendszereinek mintájára fogja fel a logikai teret. Ez az analógia meglehetősen kézenfekvő: a szöveg maga is említést tesz logikai koordinátákról (3.41), és térkoordinátákról beszél akkor is, amikor geometriai térhez hasonlítja a logikai teret (3.032, 3.42).

Erik Stenius szerint e tér irányait a lehetséges összefüggések jelölik ki. Mivel az összefüggések egymástól függetlenül állnak vagy nem állnak fenn, a tér irányai függetlenek egymástól (2.061); mindenekelőtt ez motiválja a koordinátarendszer analógiáját. Minden irányban csupán két megengedett koordináta van: az `igen` és a `nem`, vagy ha úgy tetszik, a `fennáll` és a `nem áll fenn`.[1] A tér egyes pontjai a világ lehetséges állapotai;

[1] Stenius [1960], 38-60.o.Stenius több változatban tárgyalja a koordinátarendszert; ezek némelyikében valós számok a koordináták, és ezzel már nem a *Tractatus*, hanem a *Néhány megjegyzés ...* logikai tér-fogalmának felelnek meg, amely szerint az elemi kijelentésekből kiküszöbölhetetlenek a számok (ld. 2.1. szakasz).

a világ pedig nem más, mint a tér egy pontja. A kijelentések nem abban az értelemben határoznak meg helyet a logikai térben (3.4sk.), hogy a tér egyetlen pontját jelölnék ki a világ számára; erre csak a világ teljes leírása (hogy igaz vagy hamis leírás, az mindegy) lenne alkalmas. Kijelölik viszont a kijelentések a tér egy ponthalmazát. Ha a világ e ponthalmazban van, a kijelentés igaz; ha nem, nem. Vagy fogalmazhatunk úgyis: a kijelölt ponthalmaz a világ azon lehetséges állapotainak összessége, amelyek kielégítik a kijelentést. A két szélsőséges kijelentést, a tautológiát és az ellentmondást kielégítő ponthalmaz a teljes logikai tér, illetve az üres halmaz. Még tovább vihetjük az analitikus geometriai analógiát, ha a logikai műveleteket ponthalmazokat ponthalmazokba leképező, egy-vagy többargumentumú geometriai transzformációként jellemezzük.

Lássunk egy példát a steniusi logikai térre! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy csak három elemi kijelentés van, p, q és r! Ezek jelölik ki a logikai tér három irányát, minden irányban az `igen` és a `nem` koordinátákkal. Ha a világ történetesen az $\langle \texttt{igen}, \texttt{igen}, \texttt{nem} \rangle$ pontban van, akkor igaz a $p \supset (q \vee r)$ kijelentés, de $p \supset (q \mathbin{\&} r)$ már hamis. Az utóbbit az $\langle \texttt{igen}, \texttt{igen}, \texttt{igen} \rangle$ pontból és az összes `nem` első koordinátájú pontból álló ponthalmaz elégíti ki; a világ viszont kívül van ezen a ponthalmazon. A tagadás viszont a komplementer ponthalmazba viszi át a kijelentést, amelyben már benne van a világ. És így tovább; látható, hogy véges esetekben a steniusi logikai tér nem különbözik az igazságtáblázattól.

Ennek az egyébként rendkívül vonzó értelmezésnek az a legfőbb hátránya, hogy nem ad számot a tárgyak szerepéről az összefüggésekben; a steniusi logikai térben a világ lehetséges állapotainak mintha nem lenne közös szubsztanciája. Így aztán semmi szerepe nincs például annak sem, hogy két összefüggés formája megegyezik-e. Így aztán ha általános kijelentést használunk egy logikai hely megadására, a hely meghatározásához olyan adatokat kell figyelembe vennünk, amelyek magában a térben nem jelennek meg. Úgy is fogalmazhatnánk: a steniusi értelmezés akkor volna kimerítő, ha Wittgenstein az összefüggéseknek és az elemi kijelentéseknek nem tulajdonítana belső szerkezetet, tehát ha a tractatusi logika lényegében nulladrendű volna.

Max Black kommentárja a steniusi mellett egy alternatív értelmezést is vázol a logikai térre: ebben szemben a logikai tér irányait a tárgyak vagy neveik határozzák meg, pontjai pedig az összefüggések vagy az azokat leképező elemi kijelentések. „A nyelv minden egyes nevét [...] más és más »vonatkoztatási tengelynek« lehet tekinteni, és a »dimenziók« száma annyi volna, ahány név van – vagy ami ugyanaz: a világban lévő különböző tárgyak száma.”[2] A koordináták itt is nyilván az `igen` és a `nem`; egy pont va-

[2] Black [1964], 155.o.

lamely irányban akkor és csak akkor rendelkezik az `igen` koordinátával, ha az iránynak megfelelő név szerepel a pontnak megfelelő kijelentésben. Ez az elgondolás csak akkor volna tartható, ha egyfelől elfogadnánk Blacknek, hogy az összefüggések tárgyak, az elemi kijelentések pedig nevek halmazai, tehát a nevek sorrendjének nincs szerepe egy elemi kijelentésben;[3] másfelől lemondanánk arról, hogy az elemi kijelentések formával rendelkeznek, és nevek bármely halmazát értelmes elemi kijelentésnek tekintenénk. Ráadásul még az üres halmazt is kijelentésnek kellene tekintenünk, hiszen ez felel meg a koordinátarendszer origójának. (Vö. 3.341.)

Black értelmezése mégsem menthetetlen. Tudjuk, hogy ha egy p elemi kijelentésben a minden nevet más és más változóval helyettesítünk, akkor egy alapmintához jutunk, amelynek értékei a p-vel egyező formájú elemi kijelentések (3.315). Ezt az ekvivalencia-osztályt elrendezhetjük egy koordinátarendszerben, amelynek tengelyei a neveket helyettesítő változók a mintában, és a tengelyekhez tartozó koordináták a változó helyére helyettesíthető nevek. A tengelyek függetlenek egymástól, amennyiben azt, hogy milyen név kerül az egyik változó helyére, nem befolyásolja, hogy a másik helyre milyen név kerül.

A további kifejtéshez ezúttal is hasznos lesz egy példa. Az egyszerűség kedvéért tekintsük ismét az aRb relációs kijelentést! A kijelentéshez tartozó alapminta: xYz. A változók lehetséges értékei pedig legyenek a, b, c stb., illetve R, S stb.! A koordinátarendszernek három tengelye van; a, b, c stb., illetve R, S stb. az x és a z, illetve az Y tengelyhez tartozó koordináták.

Mostantól erre a módosított változatra utalunk blacki logikai térként. Az elemi kijelentések itt is egy pontra mutatnak rá, sőt egy adott pont a koordinátái révén akár azonosítható is az elemi kijelentéssel, amely rámutat. A teljes logikai tér annyi egymástól független szegmensre oszlik, ahány formája lehet az elemi kijelentéseknek. A világ itt nem egy pont, hanem azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekre az igaz elemi kijelentések mutatnak. Ebben a verzióban már a kvantorral történő általánosításhoz használt kijelentésváltozó-absztrakciós műveletek is értelmezhetők a szokásos értelemben vett cilindrifikációs műveletekként. Az összetett kijelentések közül viszont már csak azok mutatnak egy ponthalmazzal a blacki logikai térben, amelyek elemi kijelentések (véges vagy végtelen) konjunkciójával állnak elő. A kijelentések általában ponthalmazok halmazaira utalnak, amelyek közül ha bármelyik része a világnak, akkor a kijelentés igaz.

A *Tractatus* szövege alapján eldönthetetlen, hogy a tér- és koordináta-metaforika a

[3] I.m. 82sk.o.

blacki és a steniusi értelemben vett logikai térre utal. De ez nem baj. A kettő ugyanis nem mond ellent egymásnak A kijelentések logikai formájának két különböző aspektusát tükrözik; a steniusi a kijelentéslogikai formát, a blacki pedig az elemi kijelentéseknek az általános kijelentésekben kihasznált formáját. Vagy ha úgy tetszik; a blacki a logikai tér szubatomi szintű szerkezetét tükrözi, a steniusi pedig a tér makroszerkezetét. Figyelemre méltó azonban, hogy a két értelmezés nemigen egyesíthető. Ez mutatja az analitikus geometriával való analógia határait.

Az elemzés fényében érdemes megjegyezni, hogy a 4.4. szakaszban bevezetett $\langle\langle \mathtt{G}, \mathtt{SV} \rangle\rangle$ páros különféle változatai a logikai tér minimális értelmezésének tekinthetők annyiban, amennyiben mind a steniusi, mind a blacki értelmezési lehetőséget nyitva hagyják; mentesek azonban attól a szemléletes tartalomtól, amellyel ezek az értelmezések rendelkeznek.

5.3. Két érv a tárgyak számosságáról

A tractatusi nyelvfilozófiában és ismeretelméletben nagyon fontos szerepet tölt be az a meggyőződés, hogy semmilyen *a priori* számosságbeli korlátozás nem adható sem a tárgyak számosságára általában, sem az egy-egy összefüggést alkotó tárgyak számosságára. Ez természetesen nem zárja ki, hogy a tractatusi filozófiát meghatározó egyéb meggyőződésekből ne következhetne valamilyen *a priori* korlátozás. Ez esetben belső ellentmondásra derülne fény a tractatusi filozófiában, ami negatív eredmény ugyan, de mindenképpen eredmény. Terjedelmi okokból ezt a kérdést sem tudom kimerítően tárgyalni. A következőkben mindössze két érvet szeretnék megvizsgálni, amely a tárgyak osztályának végtelensége mellett szól.

Az első Robert Fogelin provokatív monográfiájából származik. Fogelin szerint ha feltesszük, hogy a tárgyak valamely kategóriájában csak véges sok tárgy van, „a következő zavar keletkezik. Tegyük fel, hogy az A tárgy a K osztályba tartozó tárgyakkal kombinálódhat. K-ba csak valamely véges n számú elem tartozik, és tudjuk, hogy A ezek közül $n-1$-gyel nem kombinálódik. Ebből következik, hogy A *mindenképpen* kombinálódik a fennmaradó tárggyal. Így ha egy világban egy bizonyos fajta tárgyból csak véges sok van, elvész az összefüggésektől megkövetelt függetlenség.”[4] Hozzáértett premisszaként természetesen az érvhez tartoznak a *Tractatus* izolált tárgyakat elutasító bekezdései is: „[a] dologhoz lényegileg hozzátartozik, hogy összefüggés alkotórésze lehet” (2.011); „nem

[4] Fogelin [1976], 10.o. Fogelin később újra előveszi ezt az érvet a kvantifikációs tartomány végtelensége mellett.

gondolhatunk el egyetlen tárgyat sem más tárgyakkal való kapcsolatának lehetőségén kívül" (2.0121) stb.

Hans-Johann Glock *Wittgenstein-szótár*ának *logikai tér*-szócikke kitér Fogelin érvére, és ellenérvvel válaszol: „itt egy p_n elemi kijelentés [nem egy másik elemi kijelentésből, hanem] egy $\sim p_1$ & $\sim p_2$ & $\ldots \sim p_{n-1}$ *molekuláris* kijelentésből következik."[5] Ugyanakkor azt Glock is elfogadja – állítása szerint a legtöbb kommentátorral együtt –, hogy az A tárgynak a K osztály legalább egy elemével „*aktuálisan* kombinálódnia kell"; és a 2.0131. pontot idézi: „A térbeli tárgynak a végtelen térben kell elhelyezkednie. (A térbeli pont egy argumentumhely.) A látómezőben levő foltnak nem kell ugyan vörösnek lennie, de valamilyen színnel rendelkeznie kell: úgyszólván körülveszi a szín-tér. A hangnak rendelkeznie kell *valamilyen* magassággal, a tapintóérzék tárgyának *valamilyen* keménységgel stb."

Ezek az érvek már csak azért is figyelemre méltók, mert jól megfigyelhetők rajtuk a *Tractatus*-interpretáció jellemző csapdái. Haladjunk fordított sorrendben a megjegyzésekkel!

Ami a 2.0131. pontot illeti: ezzel a problémával a 2. fejezetben részletesen foglalkoztunk. Ha a hangok és a hangmagasságok a tractatusi tárgyakkal analóg módon viszonyulnának egymáshoz, a hangmagassággal rendelkezés pedig elemi összefüggés volna, akkor valóban sérülne az összefüggések függetlensége, éspedig kétszeresen: egyszer azért, mert bármely két különböző hangmagassággal való rendelkezés kizárja egymást, másfelől pedig azért, mert abból, hogy egy hang egy kivételével semmilyen hangmagassággal nem rendelkezik, következik, hogy a fennmaradó egyetlen hangmagassággal viszont rendelkezik. De ebből csak annyi következik, hogy rossz az analógia. A 2.3. szakasz 6-8. modelljeiből kiderül, hogy egymást kizáró összetett tulajdonságok nagyon egyszerűen előállíthatók egymástól független elemi tulajdonságok komplexumaként. A 6. modellben például az a tárgy, amely sem a VÖRÖS, sem a ZÖLD, sem a KÉK nevű tárggyal nem kapcsolódott össze, nem színtelen, hanem fekete volt; tehát rendelkezett színnel. Abból tehát, hogy tulajdonságok készletéből egy tárgynak legalább eggyel aktuálisan rendelkeznie kell, csak annyi következik, hogy a készletben szereplő tulajdonságok összetettek.

Ami viszont a premissza molekularitását illeti: az $\sim p_1, \ldots, \sim p_n \Rightarrow p_n$ következményviszony – akár összevonjuk a premisszákat egyetlen kijelentésbe, akár nem – igenis sérti az összefüggések függetlenségét. A 2.062. pont, amelyet az összefüggések függetlenségét állító 2.061-hez fűzött magyarázatként is lehet olvasni,[6] e tekintetben némileg félre-

[5] Glock [1996], 221.o. Glock (egy szótár esetében érthető módon) nem hivatkozza meg a forrást.

[6] Ha szigorúan követjük a számozáshoz fűzött wittgensteini magyarázatot, akkor nem lehet így

vezető: „Egy összefüggés fennállásából vagy fenn nem állásából nem lehet egy másik összefüggés fennállására vagy fenn nem állására következtetni.” Ennél jóval többnek kell teljesülnie a tractatusi igazságfeltétel-szemantika megalapozásához: *Legyen H elemi kijelentések halmaza, p pedig elemi kijelentés úgy, hogy $p \notin H$; továbbá legyen ϕ a H-beli kijelentések igazságfüggvénye. Ekkor $\phi \not\Rightarrow p$ és $\phi \not\Rightarrow \sim p$.*

Mindez összefügg azzal, amit a 4. fejezet elején írtam a *Tractatus* szövegében megmutatkozó és a benne kifejtett pontosságeszmény közötti feszültségtől. Noha Wittgenstein már az *Előszó*ban leszögezi, hogy „ami egyáltalán mondható, az világosan is mondható”, a maga részéről feltűnően gyakran beéri hozzávetőleges megfogalmazásokkal. Például az összetett kijelentésekről nem egyszer úgy beszél, mintha elemi kijelentések konjunkciói, esetleg állított és tagadott elemi kijelentések konjunkciói lennének, holott az igazságtáblázatoktól a kijelentés általános formájának meghatározásáig minden lényeges pontból az derül ki, hogy a kijelentések igazságfüggvényei bonyolultabbak is lehetnek.[7] Érdemes tehát gyanakodva olvasni és súlyozni a *Tractatus* bekezdéseit. Hogy a bennük kifejtett rendszer konzisztens-e, az kétséges; de hogy a könyv szövege nem az, az egészen biztos.

Végül ami Fogelin konklúzióját illeti: számomra az a legmeglepőbb, hogy a más kérdésekben rendkívül figyelmes Glock miért nem ezzel száll vitába. Érthetetlen, hogy miért a véges és a végtelen premisszahalmaz között húzza meg Fogelin a határt a tekintetben, hogy egy következtetés sérti-e az elemi kijelentések függetlenségét. Teljes általánosságban: amennyiben Pa elemi kijelentés, és a $\forall x(x \neq a \supset \sim Px) \Rightarrow Pa$ (ha ragaszkodunk a tractatusi változóhasználathoz: $\forall x(Px \supset Pa) \Rightarrow Pa$), vagy ha $H \setminus \{p\} \Rightarrow p$, sérül az összefüggések függetlensége; teljesen függetlenül attól, hogy a kvantifikációs tartomány véges vagy végtelen. Az igazságtáblázatok módszere véges módszer, és emberi erővel a konjunkció jeléből is csak véges sokat tudunk egymás mögé írni; de ez még nem ok arra, hogy feltételezzük: végtelen elemi kijelentésosztályra nem terjed ki a függetlenség követelménye.

És akkor még nem is említettük a kompaktsági tételt, amely szerint ha egy kijelentés következik egy végtelen premisszaosztályból, akkor annak valamely véges részéből is következik. Persze azt már a 3.3. szakaszban is láttuk, hogy óvatosan kell bánni a metalogikai tételek alkalmazásával a tractatusi logika kontextusában. De a tractatusi szimbolika sajátosságait félretéve, klasszikus nulladrendű következtetésként is meg le-

olvasni; a 2.061-hez fűzött magyarázatok számozása ugyanis a $2.061n$ lenne. Ezt a szabályt azonban kevés helyen látszik betartani a szöveg.

[7] Csak egyetlen markáns példa: „A kijelentés általános formája a következő: Így és így állnak a dolgok.” (4.5) Nem kis értelmezői feladat ezt összhangba hozni a 6. pontban szereplő $[\overline{p}, \overline{\xi}, N(\overline{\xi})]$ általános formával.

het fogalmazni a tractatusi összefüggések viszonyát leíró $H \setminus \{p\} \Rightarrow p$-t; ott pedig aligha vitatható a kompaktsági tétel.

A másik érvet, amit meg szeretnék vizsgálni, magam vetettem fel abban a tanulmányomban, amelyben először tettem kísérletet a tractatusi logikai szimbolika rekonstrukciójára. Ez a következőképpen hangzott:

> Wittgenstein szerint a kijelentésjel maga is tény. [...] Tehát egy név példányai az adott névvel megegyező logikai formájú tárgyak. (Ha ezen túl azzal az evidens feltevéssel is élünk, hogy minden névnek van legalább egy példánya és a névpéldányok összessége valódi részhalmaza G-nek, tehát vannak genuin tárgyak, amelyek nem névpéldányok, ϱ bijekció voltából már közvetlenül adódik, hogy végtelen sok név és tárgy van. A genuin tárgyak feltételezése azonban egyáltalán nem evidens: a fentiek kissé abszurd következményeként a tárgyakat magukat is tekinthetjük önnön neveik példányainak.[8]

Ebben az érvben sem kevés a szétszálaznivaló. Kezdjük azzal az állítással, hogy a névpéldányok tárgyak. Az az észrevétel, hogy a kijelentésjelek, vagy legalábbis azok példányai tények (3.14; jel és jelpéldány különbségére még visszatérünk), kulcsszerepet tölt be a *Tractatus*ban, hiszen összeköti a képelméletet a kijelentések elméletével. De nem következik belőle, hogy a névpéldányok tárgyak volnának. Ez csak abból következne, hogy az elemi kijelentésjelek példányai elemi tények, vagyis tractatusi tárgyak aktuális elemi konfigurációi. Ebben az esetben valóban nem volna más lehetőség, mint hogy tárgyak képviseljék a tárgyakat. Ilyen megszorítást azonban a *Tractatus*ban nem találunk, és meglehetősen abszurd következményekkel is járna.

Egyrészt a jelpéldányoktól azt szoktuk meg, hogy kiterjedtek és összetettek legyenek – a nagy A betű például három vonásból áll, és még a vonásokat sem igen tekinthetjük egyszerűnek (ld. a 2.3 szakasz 1. modelljéhez fűzött megjegyzéseket). Egy ilyen komplexumot képesek vagyunk észlelni és beazonosítani (vö. 3.1sk), míg az egyszerű tárgyak létezésére leginkább csak következtetni tudunk. A névpéldányok beazonosításához nem elegendő, hogy mint tárgyak ugyanazzal a formával rendelkezzenek, mint a jelöletük. Éljünk egy példa erejéig ismét azzal az *ad hoc* feltevéssel, hogy vannak relációs elemi kijelentések, és tekintsük aRb-t, ahol a és b egyező formájú tárgyak! Hogyan döntjük el ezt a kijelentést látva vagy hallva, hogy aRb-vel és nem bRa-val van dolgunk? a-nak és b-nek rendelkeznie kell valamilyen P, illetve Q ismertetőjeggyel; de akkor a kijelentésjel teljes logikai elemzése máris nem aRb, hanem $Pa \ \& \ Qb \ \& \ aRb$; és akkor még figyelembe

[8] Mekis [2001b, 257.o.]

sem vettük, hogy R-t is meg kell különböztetni valahogy az S relációtól, ahhoz pedig már másodrendű tulajdonságra van szükség.

Másrészt a jelpéldányoktól azt is megszoktuk, hogy keletkeznek és pusztulnak. A tractatusi tárgyak viszont atemporálisak. Ha a egyszerű tárgyat jelöl, akkor nincs olyan értelmes kijelentés, amely a létezését állítaná. Az *a létezik* jelsorozat csak akkor értelmes, ha a jelölete komplexum, és akkor azt jelenti, hogy a komponensei történetesen ezzé a komplexummá konfigurálódnak, vagyis egy – elemi vagy összetett – tényt állít. A nemlétezőkről szóló beszéd régi problémája tehát a *Tractatus*ban elegáns megoldást nyer: az egyszerű tárgyak esetében a probléma fel sem vetődik, a komplexumok esetében pedig a nemlétezőkről tett kijelentések egyszerűen hamisak.[9] Tehát csak akkor van értelme azt mondani, hogy a nyelvhasználat során jelpéldányokat állítunk elő és törlünk, ha a jelpéldányok komplexumok.

Mivel a komplexumok tárgyak elemi vagy összetett konfigurációi, a tanulmánybeli érv ezen a ponton még menthető az alábbi formában:

1. Van legalább egy tárgy.
2. Minden tárgynak van pontosan egy neve.
3. Különböző tárgyaknak nincs közös neve.
4. Minden névnek van legalább egy névpéldánya.
5. Különböző neveknek nincs közös névpéldánya.
6. Minden névpéldány legalább két tárgyból áll.
7. Különböző névpéldányok különböző tárgyakból állnak.

$\therefore$ Végtelen sok tárgy van.

Mivel a konklúzió következménye a premisszáknak, az érv csak azon bukhat el, ha valamelyik premisszája téves. Vegyük most sorra ezeket! Az 1. premisszára a 4. fejezetben is támaszkodtunk. Úgy vélem, ez kellőképpen indokolható azzal, hogy ha nem lennének tárgyak, akkor a tractatusi értelemben vett tények és az azokat leképező kijelentések sem létezhetnének; tehát sem világ, sem nyelv nem létezne. Márpedig nyelv mindenképpen létezik; és a *Tractatus* mint kantiánus metafizikai vállalkozás feladata éppen

[9] Ez jelentős mértékben eltér Russell és Quine analóg megoldásától. Russell és Quine általános kijelentésekként elemzik a nemlétezőkről tett, felszíni grammatikájuk szerint egyedi kijelentéseket; a wittgensteini komplexumokat leíró kijelentések viszont nem szükségképpen általánosak.

abban áll, hogy megvizsgálja, hogyan lehetséges. A 2.0211sk. pontokban sem az a lehetőség merül fel, hogy *nincsenek* tárgyak, hanem az, hogy minden tárgy összetett; vagy halmazelméleti terminológiával élve: a komplexumok nem jólfundáltak. Ennek ellenére szerkeszthető egy szövegszerű ellenérv a premisszával szemben:

I. „Minden egyes dolog – úgyszólván – lehetséges összefüggések terében van. Elgondolhatom, hogy ez a tér üres, de nem gondolhatom el a dolgot e tér nélkül." (2.013)

II. „Ami gondolható, az lehetséges is." (3.02)

∴ Lehetséges, hogy a logikai tér üres legyen, vagyis ne legyenek tárgyak.

Persze az érv nyilvánvalóan csúsztat: a két premisszában nem ugyanabban az értelemben van szó gondolhatóságról. A II. premisszabeli értelemben gondolkodni annyit jelent, mint a logikai tér*ben* lehetséges helyzetekről képet alkotni; az I. premissza viszont a logikai térre *mint egészre* vonatkozó lehetőségekről beszél. Más kérdés, hogy éppen a 3skk. pontok explicite kizárják bármilyen más értelemben való gondolkodás lehetőségét. Ez tehát egyike a *Tractatus* szövegét jellemző inkonzisztenciáknak: a tractatusi rendszer leírására Wittgenstein a rendszer által tiltott eszközöket használ, miközben a rendszert egyetemes érvényűnek állítja. Ez a probléma nagyon messzire vezet, később még visszatérünk rá. Most azonban haladjunk tovább a fő érv premisszáinak sorában!

A 2. premissza két részre bontható. Ahhoz, hogy a nyelvben lehetséges legyen a világ általános leírása (vö. 6.341skk.), szükséges, hogy minden tárgynak legyen legalább egy neve, hiszen ez a leírás kijelentésekben történik, amelyek elemi kijelentések igazságfüggvényei, míg az utóbbiak tárgyak konkatenációjával előálló tárgysorozatok. Másfelől – bár ez az érv szempontjából mellékes – egy tárgynak nem lehet két neve, hiszen a voltaképpeni név az, ami az egyes név-példányokban közös. Még pontosabban: meg kell különböztetnünk a név-jeleket mint típusokat, amelyeknek példányai vannak, és a szimbólumot, amely az összes név-jelben közös. (3.325, 3.3411; a wittgensteini terminológia e ponton sem egységes, de a szóhasználati zűrzavarból világosan kirajzolódik a három különböző értelemben vett név megkülönböztetése.) Szimbólumból egy van, jelből lehet több, mindaddig, amíg nem a logikai szimbolikát használjuk, ahol egy névhez mint szimbólumhoz egyetlen névjel tartozik.

A 3. premissza is a nevekre mint szimbólumokra vonatkozik. A logikai szimbolikában azonban a nevekre mint jelekre is érvényes. A köznyelvben alkalmazhatunk olyan jelet, amely több különböző szimbólumhoz is tartozik; de a köznyelvben nemigen találkozunk tárgyak neveivel – ahogy elemi kijelentésekkel sem. Ezeket csak a logikai elemzés hozza felszínre. Hasonlók mondhatók el az 5. premisszáról is; a 6. premissza mellett pedig közvetlenül az érv megszerkesztése előtt érveltünk.

Most térjünk rá a 4. premisszára: az, hogy minden névnek van legalább egy példánya. Még egyszer hangsúlyozzuk: névpéldányok csak akkor kerülnek használatba, ha logikai szimbolikát, tehát teljesen elemzett, többértelműségtől mentes kijelentéseket használunk a világ leírására. Ennek a *Tractatus* szerint lehetségesnek kell lennie; és ha a világ teljes leírását általános kijelentésekben megadtuk, elvben lehetségesnek kell lennie annak is, hogy e leírás bármelyik részét elemi kijelentésekben adjuk meg. Tehát ha arra nincs is szükség, hogy az összes tárgy nevéből aktuálisan rendelkezésre álljon egy-egy példány, annak feltétlenül lehetségesnek kell lennie, hogy bármely tárgy nevéből elő tudjunk állítani egy-egy példányt.

És, úgy vélem, ez az a pont, ahol az érvet megtámadhatjuk. Ugyanis a 7. premissza csak akkor plauzibilis, ha a különböző névpéldányok egyszerre vannak jelen. Ha egyszer az egyik, másszor a másik név aktualizálódik név-példányokban, akkor az e példányokat mint komplexumokat alkotó tárgyak is újrahasznosíthatók. Az érv tehát nem konkluzív: az iménti megfontolásokból legalábbis az következik, hogy a nevek és az elemi kijelentések tractatusi elmélete mégsem teszi szükségszerűvé, hogy végtelen legyen a tárgyak osztálya.

Felvetődhet – és nem ritkán fel is szokott vetődni – persze egy harmadik érv is: az általános kijelentésforma tractatusi leírásával kapcsolatos problémák zömétől megszabadulhatunk, ha feltételezzük, hogy a logikai tér véges. Glock Fogelinnel folytatott vitáját például ezzel a mondattal zárja: „Végül, úgy tűnik, az általános kijelentésforma [wittgensteini] leírása csak akkor sikeres, ha az elemi kijelentések száma véges."[10] Szerintem ez rossz stratégia. A logikai tér végességének vagy végtelenségének kérdését elvi okokból nyitva kell hagyni. Ha más szempontok alapján – mondjuk az általános kijelentésforma elemzésével – bebizonyosodik, hogy a logikai tér véges, akkor meg kell állapítanunk, hogy a tractatusi rendszer lényegi önellentmondást tartalmaz. De ezt nem lehet sejtésre alapozni.[11]

[10] I.m. 222.o.

[11] A rekonstrukció realista változatából kiolvasható egy izgalmas számossági érv:

1. Van legalább egy tárgy.
2. Minden tárgy részt vesz legalább egy összefüggésben.
3. Minden összefüggésben legalább két tárgy vesz részt.

$\therefore$ Van legalább két különböző tárgy.

5.4. Még egyszer a szintaxis és szemantika viszonyáról

Felmerülhet egy ellenvetés azzal szemben, amit szintaxis és szemantika viszonyáról a 4.3. szakaszban mondtunk. Wittgenstein maga ugyanis a következőképpen fogalmaz a szintaxis és a szemantika viszonyáról:

> Egy jel jelentésének soha nem szabad szerepet játszania a logikai szintaxisban. A logikai szintaxisnak anélkül is felépíthetőnek kell lennie, hogy szó esne a jel jelentéséről; csak a kifejezések leírását szabad előfeltételeznie.
>
> Az iménti észrevétel birtokában bepillantást nyerünk a russelli »theory of types« lényegébe: Russell hibája abban mutatkozik meg, hogy a jelölési szabályok felállításakor a jelek jelentéséről kellett beszélnie.
>
> (3.33-3.331)

Minden látszat szerint ugyanazt a hibát követjük el, mint Russell, amikor szemantikai alapokra helyezzük a tractatusi logikai szintaxist. Mégsem ez a helyzet.

A nyelv felépítésében egyetlen ponton kellett a logikai térre hivatkoznunk; akkor, amikor a neveket bevezettük és grammatikai formát rendeltünk hozzájuk. Amikor aztán már elemi és összetett kijelentések előállítására került sor, csak a nevek grammatikai formájára kellett hivatkoznunk, a jelöletükre nem. Nem volt szükség arra, hogy önkényes, a kifejezések jelentésén alapuló grammatikai megállapodásokkal szabályozzuk a kifejezések használatát a szemantikai antinómiák elkerülése érdekében; a nevek grammatikai formája mindenről gondoskodott.

Mi lett volna, ha fordítva járunk el a nyelv felépítésében, és először a neveket vezetjük be, majd a már kész nyelvhez utólag igazítjuk hozzá a tárgyak és az összefüggések rendszerét? Ez esetben mindazokat a döntéseket, amelyeket a logikai tér konstrukciójára bíztunk – hány tárgy van?; melyek ezek lehetséges formái?; hány tárgy alkothat egy összefüggést?; és így tovább – a nyelven belül kellett volna meghoznunk. E döntéseket csak azzal motiválhattuk volna, hogy a kifejezéseinkkel mire akarunk utalni. Tehát éppen ebben az esetben estünk volna abba a hibába, amiről az idézett bekezdések szólnak.

Másfelől Wittgenstein az idézett helyen a logikai szintaxisnak egy már interpretált nyelven belüli rekonstrukciójáról szól; vagyis arról, amikor a nyelven belül, a kijelentések logikai elemzésével építjük fel a logikai szintaxist. Ilyenkor a neveket nem kell külön bevezetni,hiszen azok már adva vannak; pontosan úgy, ahogy a világ is adott. A nyelv

---

Úgy vélem, a realista változatban ez az érv konkluzív. A nominalista verzióban a 3. premissza nem teljesül.

és a világ egymást feltételezi; ha úgy tetszik, egyazon logikai térben vannak adva. (A rekonstrukcióban nem vezettük ugyan be és nem illettük külön névvel az $\langle\langle \mathtt{N}, \mathtt{ES} \rangle\rangle$ párt, de $\mathtt{N}$ és $\mathtt{ES}$ definíciója szerint ez izomorf $\langle\langle \mathtt{G}, \mathtt{SV} \rangle\rangle$-vel, tehát lényegében mindegy, melyiket vezetjük be logikai térként.)

Az, hogy a nyelv előzetesen adott, és meghatározza a logikai szimbolika felépítését, velejárója annak a nevezetes wittgensteini tézisnek, amely szerint egyetlen nyelv van, és annak logikája magában foglalja bármilyen köznyelvi vagy formális nyelvi kifejezési forma lehetőségét. Ha úgy tetszik, ezt akár úgy is megfogalmazhatjuk: *nincs lényegi különbség a természetes nyelvek és a logikai szimbolika között*. Ezt a rendkívül provokatív tézist a nyelvfilozófia Wittgenstein utáni történetében Richard Montague vetette fel újra, és Montague verziójában a formális szemantika kutatási programjának megalapozójává vált. Kevés szakirodalmi munka említi ezt a kézenfekvő párhuzamot;[12] én most mégis alapvető különbségekre szeretném felhívni a figyelmet.

Az egyik természetesen az, hogy míg Montague mindhárom klasszikus tanulmányában[13] a köznyelvi grammatika és a – wittgensteini terminológiával – logikai grammatika közötti szakadék áthidalásán fáradozik, míg Wittgenstein számára egy ilyen feladat méltóságon aluli lett volna. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

Egy másik nagyon jelentős különbség abban áll, hogy Montague Donald Davidson nyomán a „komoly” szintaxis és a szemantika célját a „tetszőleges interpretáció melletti igazságfogalom” megszerkesztésében látja[14]. Egy montague-i természetes nyelvtöredék szintaktikai kategória- és szabályrendszerének tetszőleges interpretációhoz igazodnia kell. A nyelvet tehát interpretálatlanul kell bevezetni, és csak utólag rendelni a kifejezésekhez jelentést. A jelentéssel szemben semmilyen előzetes követelményt nem támaszt az, hogy mire szoktuk használni a kifejezéseket. A szintaxissal szemben e fragmentumokban két követelmény van:

1. a generált kifejezések grammatikai intuícióink számára elfogadható természetes nyelvi kifejezések legyenek;

2. a kifejezéseket lehessen úgy interpretálni, hogy a logikai intuícióink számára elfogadható analitikus következményviszonyok keletkezzenek.

[12] A kivételek egyike Martin Stokhof kiváló cikke a *Tractatus* és a formális szemantika viszonyáról (Stokhof [m.e.]).

[13] *English as a Formal Language*; *Universal Grammar*; *The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English*. In: Montague [1974].

[14] Montague [1974], 189.o.

A szintaxist tehát a szabatos interpretáció lehetőségét szem előtt tartva, de bármely konkrét interpretációtól függetlenül kell megadni: a jólformáltság előfeltétele az értelmességnek, és az értelmességtől függetlenül határozódik meg.

A tractatusi nyelvfelfogásban ezzel szemben egy interpretálatlan kifejezés egyszerűen értelmetlennek minősül: „minden lehetséges kijelentés szabályszerűen képzett, és ha nincs értelme, ez csak azért lehet, mert egyes alkotórészeinek nem adtunk jelentést" (5.4733). A szintaxis csak a nyelv interpretációjával párhuzamosan adható meg, a jólformáltság és az értelmesség pedig egyszerűen egybeesik.

Összehasonlításképpen: a montague-i intenzionális logika nyelvének interpretációjához is szükség van egy, a tractatusihoz hasonló szemantikai keretre. Ez a lehetséges világok halmazát, valamint az azon értelmezett alternatívarelációt tartalmazza, és akár a montague-i logikai térnek is nevezhetnénk, hiszen a formulákat – csakúgy, mint a tractatusi logikai tér esetében – csupán ennek a struktúrának a vonatkozásában tudjuk igazságértékkel ellátni. A szintaxis azonban itt a keretstruktúrától függetlenül adható meg; ugyanaz a logikai nyelv alkalmas az eltérő keretstruktúrát igénylő interpretációkhoz. A tractatusi logikai térnél ilyesmiről szó sem lehet.

A szemantikától függetlenül bevezethető szintaxis igényét, mint oly sok mást is a logikai szemantikában, Tarskitól szokás származtatni. Tarski két kritériumhoz köti a formalizált nyelv fogalmát: 1. a nyelvben állítható (vagyis értelmes) mondatok halmaza induktív definícióval legyen bevezetve; 2. e definíció csak a kifejezések formájára hivatkozzék.[15] Amennyiben egy nyelv csak az első feltételt teljesíti, a szó tarski értelmében nem nevezhető formalizáltnak, csupán szabványos struktúrájúnak. Tarski nem ad példát ilyen nyelvekre, és a mesterséges nyelvek későbbi története sem segít ki bennünket példákkal.

A tractatusi nyelv azonban a fenti érvelés alapján a tarski értelemben szabványos struktúrájú, de nem formalizált nyelv. Amint azt a 4.7 szakaszban láttuk, a szabványos struktúra önmagában is biztosítja a tarski-stílusú igazságdefiníció lehetőségét a nyelvben. Ez a definíció egy kész szintaxisra és előzetes interpretációra épül; e tekintetben a wittgensteini szintaxis és szemantika deviánsnak bizonyul. Abban a tekintetben azonban, hogy lehetővé teszi az igazság és a kapcsolódó szemantikai fogalmak tarski-stílusú definícióját, nagyon is beleillik a formális szemantikai hagyományba.

[15] *Az igazság szemantikus felfogása és a szemantika megalapozása.* In: Tarski [1990], 318-320.o.

5.5. A *mondani-mutatni* megkülönböztetés

A 4.9. szakaszban érintett nominalista fordítási stratégia a realista változat Rab elemi kijelentését a $P(r, a, b)$ atomi formulának feleltette meg, ahol a és b az individuumnevek fordítására kijelölt szortból való, r pedig a binér individuumrelációk fordítására kijelöltből; végül P szerepe az, hogy a célnyelv eltérő szortú individuumkonstansait atomi formulába rendezze. Ha megpróbáljuk visszakeresni P megfelelőjét a tractatusi nyelvben, a legalkalmasabb jelölt az elemi kijelentés formája, `esform`(Rab) lesz. Ezzel a fordítás a lehető legsúlyosabb vétséget követi el a kijelentés tractatusi képelméletével szemben; annak kimondására tesz kísérletet, ami csak megmutatkozhat. Ha $P(r, a, b)$ értelmes lenne, akkor olyan kép lenne, amely önnön formáját képezi le. Ez azonban lehetetlen (2.172).

A P formapredikátum legalább két nevezetes elgondolást megidéz a nyelvfilozófia történetéből. Az egyik Fregéé, aki a megítélhető tartalom és az ítélet közötti különbséget egy speciális jellel, a levezethetőség jeleként máig használatos '$\vdash$' ítéletjellel fejezte ki. Ha egy ítélet logikailag összetett, akkor komponensei nem ítéletek, hanem megítélhető tartalmak, amelyeket egy közös ítéletjel zár le ítéletté. A megítélhető tartalom egy lebegtetett lehetőség, amelynek az ítéletjellel lezárt változat a meglétét állítja.[16] Ezt tractatusi fogalmakra lefordítva a fregei ítéletjel a következő ötletet sugallja. Különböztessünk meg két különböző értelemben vett képet; egy fiktívnek nevezhetőt, amely leképez egy lehetséges helyzetet, és egyet, amelyet faktívnak nevezhetnénk, és amely e helyzet meglétét is állítja. A hétköznapokban bennünket körülvevő képek között mindkettőre találunk példát.[17]

A fiktív és faktív képeknek ez a kézenfekvő megkülönböztetése persze értelmezhetetlen a tractatusi képelméletben. A kép attól képe egy lehetséges helyzetnek, hogy elemei megfelelnek a helyzetet konfiguráló tárgyaknak, szerkezete pedig a helyzet formájának. Ha két kép ugyanazt a helyzetet képezi le, akkor leképezési módjuk bármely esetleges különbsége ellenére a kettő voltaképpen egy és ugyanaz a kép. A fiktív és a faktív képet a lényegi tulajdonságaik nem különböztetnék meg; az esetleges tulajdonságok azonban nem számítanak.

De nem is ez a legnagyobb probléma. Hanem az, hogy ha létezne is kétféle kép,

[16] G. Frege: *Fogalomírás – A tiszta gondolkodás formulanyelve, az aritmetika nyelvének mintája szerint.* In: Frege [2000], 21skk.o. Az ismertetésben eltekintettem a korai fregére jellemző, későbbi korszakában hevesen bírált pszichologista felhangoktól.

[17] Egészen triviális példával: egy hírlap riportfotói állítják az ábrázolt helyzet meglétét; a hirdetéseket illusztráló fényképek fiktív helyzeteket ábrázolnak anélkül, hogy annak meglétét állítanák.

a különbségüket nem lehetne állítani; az csak megmutatkozhatna. A fregei ítéletjellel ellátott kijelentések úgy tesznek, mintha önmagukról állítanák, hogy igazak (4.442). Ez azonban értelmetlenség. A kijelentés a valóságról tesz állítást, nem pedig önmagáról.

A fregei ítéletjelnél is találóbb párhuzamot találunk a P formapredikátumra Russellnél. David Pears a képelméletről szóló megvilágító erejű cikkében Russell módosított ítéletelméletének kritikájaként mutatja be a tractatusi képelméletet. A módosított ítéletelméletben Russell önkritikát gyakorolt saját korábbi elgondolása felett, amely szerint egy aRb kijelentést megérteni annyit tesz, mint ismeretségben lenni a benne szereplő három jel jelöletével. Mivel ez az elmélet nem ad magyarázatot már az aRb és a bRa közötti különbségre sem, Russell kiterjesztette az ismeretségi relációt az xYz „tiszta formára" is. A látszólag háromkomponensű kijelentés tehát módosított elemzésében összesen négy komponensből áll: a-ból, R-ből, b-ből és a tiszta formából, amely őket összekapcsolja.[18] A nominalista fordítás formapredikátuma anélkül reprezentálja ezt a russelli negyedik komponenst, hogy az ismeretségi relációt belekeverné a tractatusi képbe.

Bár a további részletek is izgalmasak, most elegendő a két legkézenfekvőbb hibát megemlíteni Russell módosított elméletében. Egyfelől végtelen regresszushoz vezet. Ha a P tiszta forma rendezi az aRb konfigurációba ezt a három tárgyat, akkor mi rendezi a P-t és az aRb-t a $P[aRb]$ metakonfigurációba? És így tovább, a végtelenségig. Másfelől ha a formát a kijelentés elemének tekintenénk, meg kellene különböztetni azt a formát, amely a kijelentés elemeit konfigurálja, az általa jelölt formától, amely a kijelentés által ábrázolt helyzet tárgyait konfigurálja. De a nevek megválasztása esetleges. Mi szavatolja, hogy a megfelelő nevet választottuk egy adott helyzet ábrázolására? Ha egy komponens nevét tévesen használjuk, egyszerűen hamis kijelentést kapunk. De ha a forma nevét választjuk meg tévesen, a kijelentés nem hamissá, hanem értelmetlenné válik. A tiszta formák russelli elgondolása tehát egyfelől végtelen regresszushoz vezet, másfelől összemossa az értelmes, de hamis és az értelmetlen kijelentés közötti különbséget.

Wittgenstein válasza mindkét problémára az, hogy a forma nem eleme a kijelentésnek. Így a regresszus elakad. A kijelentés formája és az általa reprezentált forma nem két különböző forma, amelyek közül az utóbbi képviseli az előbbit a kijelentésben; hanem a két forma egy és ugyanaz. Ezt jelenti az a megkapó wittgensteini megfogalmazás, hogy a kép, habár „kívülről ábrázolja a tárgyát" (2.173), egyszersmind „elér hozzá" (2.1511). Ami tehát a formával rendelkezik, az kimondható; de maga a forma nem mondható ki, csak megmutatkozhat. Ez az alapja a *mondani-mutatni* különbségtételnek, amely az egész *Tractatus*on végighúzódik.

[18] Pears [1986], 93sk.o.

A forma kimondhatatlanságának tézise tehát nem egyszerű dogma a wittgensteini nyelvfilozófiában, hanem szellemes és kézenfekvő módja annak, hogy russelli ítéletfelfogás által felvetett problémáktól megmeneküljünk. Plauzibilis megoldás, és én a magam részéről el is fogadom.

A nominalista fordítási stratégia egyre inkább menthetetlennek tűnik. A következőkben mégis megpróbálom megvédeni. De ehhez érdemes egy kicsit messzebbről elindulnunk.

Alfred Tarski nevezetes előadásában a következőképpen definiálta a *logikai fogalom* fogalmát: „egy fogalmat akkor [mondunk] logikainak, ha invariáns a világ önmagába való összes lehetséges egy-egyértelmű transzformációjára nézve". A kritériumot számos fogalomra sikerrel alkalmazza; de az utolsó példánál különös eredményre jut: „a halmazelméletet, az *eleme* reláció elméletét fölépíthetjük úgy is, hogy a válasz igenlő legyen e kérdésre, de eljárhatunk úgy is, hogy tagadó választ kapjunk. Így a válasz: »Ahogy tetszik!«"[19] Az igenlő válasz a halmazelmélet Whitehead – Russell-féle felépítéséből következik. Itt az individuumok univerzumán, vagyis a nulladik végzett egy-egyértelmű transzformációk nem befolyásolják a típusközi *halmaz-elem* viszonyokat. A másik felépítést Tarski Zermelohoz, Neumannhoz és Bernayshoz köti; ez az a felépítés, amit a szó mai értelmében is halmazelméletnek mondhatunk. Itt az *eleme* reláció az individuumok között áll fenn; tehát az individuumtartomány önmagára való egy-egyértelmű transzformációi nem hagyják érintetlenül. Ezért az *eleme* itt nem logikai fogalom. A Tarski-kritérium tehát nem ad alapot arra, hogy abszolút értelemben megkülönböztessük a logikai és a nem-logikai fogalmakat.

Még csak azt sem lehet mondani, hogy a megkülönböztetés elméletfüggő. Zermelo, Neumann és Bernays ugyanis összesen legalább egy tucatnyi különböző halmazelméletet dolgozott ki, amelyek mindegyikére érvényesek Tarski megállapításai, függetlenül azok axiómáitól – amelyekre Tarski még csak nem is hivatkozik. Másfelől ha a típuselméletet minden egyéb változtatás nélkül elsőrendű elméletként axiomatizáljuk, az *eleme* viszony elveszíti logikai jellegét. Különböző elméletek azonos nyelvi keretek között ugyanazt a választ adják Tarski kérdésére; viszont egyazon elmélet eltérő nyelvi keretek között eltérő válaszokat ad. Tehát a nyelvi keretek döntik el, hogy logikai fogalomról van-e szó, vagy sem.

A russelli típuselmélet nyelvében a tartalmazási relációt nem predikátum fejezi ki. Ez a reláció a szó tractatusi értelmében *formális reláció*. Hasonlóképpen formális fogalom itt az *osztály* vagy *halmaz* (itt nincs szerepe a különbségnek) és az *atom* fogalma

[19] Tarski [1990], 403.o., ill. 408.o.

is. Ezekről a tulajdonságokról nem lehet értelmes kijelentéseket tenni; viszont megmutatkoznak a kijelentésekben szereplő kifejezések formájában. A mai értelemben vett halmazelméleti nyelvekben viszont az *eleme* reláció a szó tractatusi értelmében tulajdonképpeni fogalom. Amikor az 'eleme' relációt kijelentésekben használjuk, nem sértjük meg a nyelvhasználati normákat. Ami a másik kontextusban csak megmutatkozhatott, az itt kimondhatóvá vált.

A sor természetesen folytatható. A *halmaz* fogalma az atommentes Zermelo-Fraenkel stílusú elméletekben logikai fogalom a szó tarski értelmében, hiszen az univerzum összes eleme halmaz, tehát a tárgyalási univerzum önmagába való egy-egyértelmű transzformációi halmazt halmazba képeznek le. Ugyanakkor formális fogalom is; nem lehet értelmesen állítani valamiről, hogy halmaz. Az üres halmaz létezésének bizonyítása az $\exists x x = x$ formulával indul. Ennek közkeletű kiolvasása: 'van legalább egy halmaz'. Ez nagyon szemléletes, és jól illik a bizonyítás kontextusába, amelyet köznyelvben nem is igen lehet másképpen előadni.[20] Ez azonban szigorún véve hibás; ezt már az is mutatja, hogy a formula logikai igazság, és ráadásul mentes a nem-logikai konstansoktól, tehát ugyanazt kell jelentenie, akár halmazelméletben, akár bármely más elméletben használjuk.

Ha Neumannt és Bernayst követve osztályrealista elmélettel dolgozunk, a halmaz fogalma tulajdonképpeni fogalommá válik, amely definiálható az *osztály* formális fogalmára támaszkodva. Ha az elméletünk ráadásul atomos is, akkor az *osztály* fogalma is tulajdonképpeni fogalom lesz. (Ez a helyzet a 4.10. szakaszban bevezetett elméletben.) És így tovább; a végtelenségig lehetne sorolni a példákat.

A halmazelméleti kitérővel két dolgot szerettem volna demonstrálni. Az egyik az, hogy Tarski *logikai fogalom*-meghatározása és Wittgenstein *formális fogalom*-meghatározása, illetve *mondani-mutatni*-különbségtétele erős analógiát mutat. Tekintetbe véve a tarski és a wittgensteini kontextus közötti jelentős különbséget, úgy vélem, ez önmagában is érdekes. Ezen túl azonban a Tarski által felvetett példa izgalmas lehetőséget mutat a Wittgenstein-szöveg értelmezésében is.

Wittgenstein azt állítja, hogy a *mondani-mutatni* dichotómia abszolút. Minden „kijelentésnek egy és csak egy teljes elemzése létezik" (3.25); nincs olyan, hogy egy köznyelvi kijelentés – mint a fenti példákban – *mondani-mutatni* ambiguitást mutatna. Ha egy

[20] A bizonyítás köznyelvi formában: *Van legalább egy halmaz. Legyen tehát h egy halmaz. Tekintsük az '$x \neq x$' formulát! A komprehenziós axiómaséma értelmében h-nak van olyan részhalmaza, amely kielégíti a formulát. Ennek a halmaznak definíció szerint nincsenek elemei. Az extenzionalitási axióma miatt ilyen halmazból csak egy van. Tehát megkaptuk az üres halmazt.*

fogalom a logikai elemzésben formális fogalomnak bizonyul, akkor az arra tett kísérlet, hogy értelmes kijelentésben szerepeltessük, kudarcra van ítélve. Ha a *Tractatus* felől tekintünk a halmazelméleti példákra, elszomorító eredményre jutunk: végső elemzésben az összes halmazelméleti fogalom formális, tehát csak a halmazelméleti fogalmakat kimondhatatlanként kezelő russelli verzió tekinthető korrektnek; azzal az apró megkötéssel, hogy a típuselmélet alapjában elhibázott. A *Tractatus* filozófiai attitűdje nem mentes az intoleranciától.

A magam részéről a *mondani-mutatni* megkülönböztetést nemcsak hogy plauzibilisnek tartom, de bizonyos értelemben hajlamos vagyok még univerzálisnak is tekinteni. Éspedig abban az értelemben, hogy minden olyan diskurzusban, amely azzal az igénnyel lép fel, hogy megalapozottan tegyen különbséget értelmes és értelmetlen kijelentések között, meg kell jelennie a *mondani-mutatni* megkülönböztetésnek. De arra már nem hajlok, hogy abszolútnak is tekintsem. Minden, az egzaktság igényével fellépő nyelvben van valami, ami megmutatható, de nem kimondható; de semmi sincs, ami minden, az egzaktság igényével fellépő nyelvben kimondhatatlan lenne. $\forall x \exists y \phi(x, y)$ & $\sim \exists y \forall x \phi(x, y)$. Alkalmas nyelvi keretek között mindent ki lehet mondani.

6. fejezet

Bibliográfia

Wittgenstein hivatkozott munkái

Tractatus

Logikai-filozófiai értekezés. (Márkus György fordítása; kontrollfordította Mekis Péter és Polgárdi Ákos.) Atlantisz, 2004.
Német-angol kétnyelvű kiadás: *Tractatus Logico-Philosophicus.* (D. F. Pears és B. F. Guinness fordítása.) Routledge, 1961.

Vizsgálódások

Filozófiai vizsgálódások. (Neumer Katalin fordítása.) Atlantisz, 1992. Német-angol kétnyelvű kiadás: *Philosophische Untersuchungen – Philosophical Investigations.* (G. E. M. Anscombe és R. Rhees fordítása.) Blackwell, 1953.

Néhány megjegyzés...

Néhány megjegyzés a logikai formáról. (Polgárdi Ákos fordítása.) Vulgo V/2.
Angolul: *Some Remarks on Logical Form.* In: Copi–Beard [1966].

Egyéb hivatkozott munkák

Allaire [1966]

E. B. Allaire: *Tractatus' 6.3751.* In: Copi-Beard [1966].

Austin [1986]

James Austin: *Wittgenstein's Solutions to the Color Exclusion Problem.* In: Shanker [1986].

Baker [1988]

Gordon Baker: *Wittgenstein, Frege & the Vienna Circle*. Blackwell.

Black [1964]

Max Black: *A Companion to Wittenstein's Tractatus'*. Cambridge University Press.

Copi–Beard [1966]

I. M. Copi – R. W. Beard (szerk.): *Essays on Wittgenstein's Tractatus*. Routledge & Kegan Paul.

Fogelin [1974]

R. Fogelin: *Negative Elementary Propositions*. Philosophical Studies 25, 189-197. Újranyomva in: Shanker [1986].

Fogelin [1976]

Robert J. Fogelin: *Wittgenstein*. Routledge & Kegan Paul.

Fogelin [1982]

Robert J. Fogelin: *Wittgenstein's Operator N*. Analysis 42.

Frege [1998]

Gottlob Frege: *Az aritmetika alapjai*. (Máté András fordítása.) Áron Kiadó.

Frege [2000]

Gottlob Frege: *Logikai vizsgálódások*. (Máté András és Bimbó Katalin fordítása.) Osiris Kiadó.

Geach [1981]

Peter Geach: *Wittgenstein's Operator N*. Analysis 41/4.

Geach [1982]

Peter Geach: *More on Wittgenstein's Operator N*. Analysis 42/3.

Glock [1996]

Hans-Johann Glock: *A Wittgenstein Dictionary*. Blackwell.

Hacker [1972]

P. M. S. Hacker: *Insight and Illusion. Wittgenstein on Philosophy and the Metaphysics of Experience*. Oxford University Press.

Hintikka–Hintikka [1986]

Jaako Hintikka – Merill B. Hintikka: *Investigating Wittgenstein.* Basil Blackwell.

Holmes [2007]

Randall Holmes: *Pocket Set Theory.* Kézirat. Url:
`http://math.boisestate.edu/%7Eholmes/holmes/pocket.dvi` (2008. február 11.)

Lokhorst [1988]

Gert-Jan Lokhorst: *Ontology, Semantics and Philosophy of Mind in Wittgenstein's Tractatus'.* Erkenntnis 29.

Márkus [1963]

Márkus György: *Kritikai megjegyzések Ludwig Wittgenstein értekezéséhez.* In: Ludwig Wittgenstein: *Logikai-filozófiai értekezés.* (Márkus György fordítása. Akadémiai, 1963.

Maury [1977]

Anders Maury: *The Concepts of Sinn' and Gegenstand' in Wittgenstein's Tractatus.* North-Holland.

Mekis [2001a]

Mekis Péter: *Megértés, igazság és jelentés Wittgenstein Tractatusában.* Világosság 2001/2-3.

Mekis [2001b]

Mekis Péter: *A Tractatus kijelentéselmélete: logikai rekonstrukció.* Magyar Filozófiai Szemle 45/3.

Mekis [2004]

Mekis Péter: *Tractatusi megoldások a színkizárási problémára.* Vulgo V/2.

Montague [1974]

Richmond E. Thomason (szerk.): *Formal Phiosophy. Selected Papers of Richard Montague.* Yale University Press.

Pears [1986]

David Pears: *The Relation between Wittgenstein's Picture Theory of Propositions and Russell's Theories of Judgement.* In: Shanker [1986].

Ramsey [2004]

Frank P. Ramsey: *Recenzió Wittgenstein Tractatusáról.* Vulgo V/2.

Ramsey [1931]

Frank P. Ramsey: *Foundations of Mathematics.* London.

Ruzsa [1988]

Ruzsa Imre: *Logikai szintaxis és szemantika*, 1. kötet. Akadémiai.

Shanker [1986]

Stuart Shanker (szerk.): *Wittgentein: Critical Assessments.* 1. kötet: *The Construction and Dismantling of the Tractatus.* Croom Helm.

Soames [1983]

Scott Soames: *Generality, Truth Functions, and Expressive Capacity in the Tractatus.* The Philosophical Review XCII/4.

Stenius [1960]

Erik Stenius: *Wittgenstein's Tractatus: A Critical Exposition of Its Main Lines of Thought.* Blackwell.

Stokhof [2002]

Martin Stokhof: *World and Life as One: Ethics and Ontology in Wittgenstein's Early Thought.* Stanford University Press.

Stokhof [m.e.]

Martin Stokhof: *The Architecture of Meaning: Wittgenstein's Tractatus and formal semantics.* Megjelenés előtt. Url: `http://staff.science.uva.nl/ stokhof/amwtfs.pdf` (2008. február 11.)

Tarski [1990]

Alfred Tarski: *Bizonyítás és igazság.* (Ruzsa Imre és mások fordítása.) Gondolat.

Varga von Kibéd [1993]

Matthias Varga von Kibéd: *Variablen im Tractatus.* Erkenntnis 39.

Wright [1996]

G. H. von Wright: *On Colour: A Logico-Philosophical Fantasy.* In: uő: *Six Essays in Philosophical Logic.* Acta Philosophica Fennica 60.