A klasszikus predikátumlogika elemei

Mekis Péter
ELTE BTK Logika Tanszék

2011. december 14.

1. Az arisztotelészi szillogisztika korlátai és az alapvető predikátumlogikai jelölések

Arisztotelész merész sejtést fogalmazott meg logikájával kapcsolatban: eszerint minden helyes következtetés visszavezethető az általa kimerítően tárgyalt kategorikus szillogizmusokra. Néhány esetben a visszavezetés nem is okoz különösebb problémát. Tekintsük például a következő harompremisszás következtetést:

1.1 Minden ember jó.
Minden görög ember.
Minden athéni görög.
Tehát: minden athéni jó.

Ez a következtetés gond nélkül szétbontható két Barbara szillogizmussá; csupán a *minden görög jó* (vagy a *minden athéni ember*) közbülső konklúziót kell közbeiktatnunk. Az tehát önmagában még nem baj, ha egy következtetésben kettőnél több premissza van.

Nehezebb, de még mindig nem minden esetben reménytelen vállalkozás kijelentéslogikai következtetéseket visszavezetni kategorikusakra. Talán a legegyszerűbb eset az, amikor a premisszák vagy a konklúzió olyan kijelentésekre bontható fel, amelyek mindegyike a négy arisztotelészi típus valamelyikéből kerül ki:

1.2 Minden ember jó.
Minden filozófus ember.
Minden politikus ember.
Tehát: minden filozófus és minden politikus jó.

Ezt a következtetést megint csak gond nélkül szétbonthatjuk két Barbara szillogizmussá, amelyek egyike a filozófusok, másika a politikusok jóságára következtet. De akkor sem mindig reménytelen a helyzet, ha a kijelentéslogikai szerkezetek elemei nem a négy arisztotelészi típusból valók. Tekintsük az alábbi példát:

1.3 Ha jogállam van, akkor szabad választások vannak.
Ha szabad választások vannak, akkor a kormány a népnek felelős.
Tehát: ha jogállam van, akkor a kormány a népnek felelős.

Ha a három kondicionális értelmezésében Philón javaslatát követjük, akkor nincs esélyünk arra, hogy a következtetést kategorikus szillogizmussá alakítsuk. Megfigyelhetjük azonban, hogy mind a premisszák, mind a konklúzió általános törvényszerűséget fogalmaz meg. A következtetést tehát – lemondva a tömörségről – a következőképpen fogalmazhatjuk át:

1.3a Minden olyan helyzetre, amelyre jellemző, hogy jogállam van, jellemző az is, hogy szabad választások is vannak.
Minden olyan helyzetre, amelyre jellemző, hogy szabad választások vannak, jellemző

az is, hogy a kormány a népnek felelős.
Tehát: minden olyan helyzetre, amelyre jellemző, hogy jogállam van, jellemző az is, hogy a kormány a népnek felelős.

Ebben a következtetésben pedig ismét csak egy Barbara szillogizmust ismerhetünk fel; a megszokott példákhoz képest csak annyi a különbség, hogy nem egyedi dolgok, hanem "helyzetek" felett általánosítunk, a kategorikus kijelentéseket pedig e helyzetek tulajdonságaira vonatkozó terminusokként értjük. A visszavezetést tehát egyszerű átfogalmazással megoldottuk. Nehezebb lenne a dolgunk, ha a premisszákban vagy a konklúzióban *és* vagy *vagy* kapcsolná össze a tagokat a viszonylag könnyen kezelhető *ha-akkor* helyett; de a kijelentéslogikán kívül is hamar találunk problémás eseteket.

Az arisztotelészi szillogizmusokban szereplő terminusok kivétel nélkül tulajdonságot fejeznek ki. A köznapi és a tudományos érvelésekben azonban lépten-nyomon viszonyt kifejező terminusokra bukkanunk. Tekintsük például az első axiómát Euklidész *Elemek* című értekezéséből (amely a geometria első rendszeres kifejtését tartalmazza, és amely az egzakt érvelés mintapéldájává vált mind a szaktudományok, mind a filozófia számára):

1.4 Ami ugyanazzal egyenlő, az egymással is egyenlő.

Világos, hogy ugyanazzal egyenlőnek lenni vagy egymással egyenlőnek lenni nem tulajdonság, hanem viszony. A *minden ember jó* mondat nyelvtani szerkezete szerint megegyezik ugyan a *minden ember egyenlő* mondattal; különbségüket jelzi azonban, hogy az utóbbi ugyanazt az kijelentést fejezi ki, mint a *minden ember egyenlő minden másikkal* mondat, a *minden ember jó minden másikkal* azonban nem ugyanazt fejezi ki, mint a *minden ember jó*.

Hogy ne csak elszigetelt kijelentéseket vizsgáljunk, tekintsük az alábbi következtetést:

1.5 Minden ember egyenlő.
Minden filozófus ember.
Tehát: minden filozófus egyenlő.

A következtetés helyes, és a felületes szemlélő számára csak újabb példa a jól ismert Barbara szillogizmusra. A helyzet mégsem ilyen egyszerű. Ez már abból is kitűnik, hogy a Barbara helyessége melletti szokásos indirekt érvelés nem alkalmazható rá („tegyük fel, hogy a konklúzió hamis; ezek szerint van legalább egy olyan filozófus, aki nem egyenlő; ...") A különbségek még egyértelműbbé válnak az alábbi, alig valamivel összetettebb következtetésben:

1.6 Minden ember egyenlő.
Minden filozófus ember.
Minden politikus ember.
Tehát: minden filozófus és politikus egyenlő.

Ez a következtetés is nyilvánvalóan helyes, és feltűnő hasonlóságot mutat 1.2-vel, amely két Barbara szillogizmus összevonásának bizonyult. Itt azonban a konklúzió nem elemezhető két kategorikus kijelentés konjunkciójaként: a *minden filozófus egyenlő és minden politikus egyenlő* mondat nyilván mást fejez ki, mint a *minden filozófus és politikus egyenlő*.

Még egy példa a tulajdonságot és a viszonyt kifejező terminusok megtévesztő hasonlóságára. Orwell *Állatfarm*jában az állatok alkotmánya a következő mondattal kezdődik:

1.7 Minden állat egyenlő.

A disznók az éj leple alatt ezt a következőképpen egészítik ki:

1.7b Minden állat egyenlő – de egyes állatok egyenlőbbek a többinél.

Mivel egy viszony senkinek sem lehet a kiváltsága, a folytatás nyilván csak úgy volna értelmes, ha az egyenlő tulajdonságot fejezne ki. A disznók csúsztatására a megtévesztő nyelvtani szerkezet ad alkalmat.

Így tehát azok a kategorikus kijelentések, amelyeknek állítmánya viszonyt fejez ki, megegyező nyelvtani szerkezetük ellenére egészen másként viselkednek következtetésekben, mint azok, amelyek állítmánya tulajdonságot fejez ki. Az előbbi típusú kijelentésekben ugyanis egyetlen kvantorszó kétszeres általánosítást fejez ki. A *minden ember egyenlő* ugyanazt mondja, mint a *minden ember egyenlő minden másikka*l; Euklidész 1.4-ben idézett első axiómáját pedig így is átfogalmazhatjuk:

1.4a Bármi legyen is az egyik dolog és bármi legyen is a másik dolog, érvényes lesz rájuk, hogy ha az egyik és a másik ugyanazzal egyenlő, akkor az egyik és a másik egymással is egyenlő.

A magyar nyelv nyelvtani szabályainak tömörítő erejét mutatja, hogy 1.4 képes ugyanazt kifejezni, mint 1.4a. A tömörítés viszont, mint láttuk, a különbségek összemosásával jár. Azokban az esetekben, amikor egy kijelentés egyszerre mutatkozik egyetemesnek és részlegesnek, még nyilvánvalóbb, hogy kétszeres általánosításról van szó:

1.8 Minden rosszban van valami jó.

Ez a mondat a rossz szempontjából egyetemes, a jó szempontjából viszont részleges. A két fogalmat a *benne van* viszonyterminus kapcsolja össze. A tömör szerkezetet megintcsak az 1.4a-hoz hasonló átfogalmazással tehetjük átláthatóbbá:

1.8a Minden dologra igaz, hogy ha ez a dolog rossz, akkor van legalább egy olyan dolog, amely jó, és az utóbbi része az előbbinek.

Ez az igencsak bonyolultra sikeredett változat jól mutatja a tömörség és az átláthatóság konfliktusát a nyelvtani szerkezetekben. A frappáns megfogalmazások félrevezetőek, a részletezők alig követhetőek. Valójában sem 1.8, sem 1.8a nem tűnik ideális megfogalmazásnak.

Mind 1.4a, mind 1.8a követhetetlenségét részben a visszautalások nehézkessége okozza. Amennyiben sikerülne olyan jelölésmódot találni, amelyben a visszautalások körülményes megfogalmazások nélkül is egyértelműek, úgy ez egyesítené 1.4 és 1.4a, 1.8 és 1.8a előnyeit. Mivel a nyelvben a visszautaló kifejezések rendszerint névmások vagy legalábbis névmási funkciójuk van, kézenfekvő, hogy mesterséges névmások bevezetésével oldjuk meg ezt a feladatot. A matematikában az ilyen mesterséges névmásokat változónak nevezik. Az elnevezés itt is magától kínálkozik, és a matematikai jelölésmód mintájára a változókat nálunk is x, y, z stb. fogja jelölni. Az egyetemességet vagy részlegességet jelölő kifejezéseket kvantorszónak vagy mennyiségjelölőnek nevezzük; minden kvantorszóhoz hozzá kell kapcsolnunk egy mesterséges névmást, amelynek előfordulásai erre a kvantorszóra utalnak vissza. Az iméntiek alapján 1.4 és 1.8 a következőképpen fogalmazható újra:

1.4b Minden x-re és minden y-ra: ha x és y ugyanazzal egyenlő, akkor x és y egymással is egyenlő.

1.8b Minden x-re: ha x rossz, akkor van olyan y, hogy: y jó és y része x-nek.

Euklidész axiómáját még pontosabban megfogalmazhatjuk, ha az ugyanazzal egyenlő kifejezésben felismerünk egy harmadik, ezúttal részleges általánosítást:

1.4c Minden x-re és minden y-ra: ha van olyan z, hogy x egyenlő z-vel és y egyenlő z-vel, akkor x egyenlő y-nal.

A kettőspontok annak a szövegrésznek a kezdetét jelölik, amelyben a bevezetett változók visszautalnak a megfelelő mennyiségjelölőre. A példákból úgy tűnhet, hogy ezeket a szövegrészeket elég balról határolni. Több praktikus okunk is van azonban arra, hogy jobbról is határoljuk ezeket. Egyrészt így lehetőségünk lesz egyazon változót többször felhasználni anélkül, hogy ez kétértelműséghez vezetne. Másrészt kétértelműségek is keletkezhetnek, ha nem jelöljük pontosan a szöveghatárokat, ameddig egy mennyiségjelölő hatása kiterjed:

1.9 Ha egy politikus igazat mond, akkor az nem számíthat semmi jóra.

Ezt a mondatot nyilván félreértés volna így értelmezni:

1.9a Van olyan x, amelyre: ha x politikus és x igazat mond, akkor x nem számíthat semmi jóra.

Valójában ugyanis az általánosítás nem részleges, hanem egyetemes:

1.9b Bármely x-re: ha x politikus és x igazat mond, akkor x nem számíthat semmi jóra.

A példában egy különös szabályt figyelhetünk meg: ha egy kondicionális előtagjában részlegesen általánosító kifejezés szerepel (*egy ember*, az utótagban pedig előfordul egy olyan kifejezés, amely visszautal az előtagbeli általánosításra (*az*), akkor az egész mondatra ki fog terjedni az általánosítás, és az nem részleges, hanem egyetemes lesz. Tehát egyáltalán nem mindegy, meddig terjed egy mennyiségjelölő hatása.

Kézenfekvő megoldás, hogy a szövegrészt, amelyben a visszautalást megengedjük, zárójelekkel határoljuk:

1.4d Minden x-re (minden y-ra (ha van olyan z (x egyenlő z-vel és y egyenlő z-vel), akkor x egyenlő y-nal)).

1.8d Minden x-re (ha x rossz, akkor van olyan y (y jó és y része x-nek)).

A szerkezet áttekinthetőségét tovább fokozhatjuk azzal, ha alkalmazzuk a már ismert kijelentéslogikai szimbólumokat és a mennyiségjelölőket is szimbólumokkal rövidítjük. "Minden x-re (...)" helyett a továbbiakban a "$\forall x$ (...)" jelölést fogjuk alkalmazni, "némely x-re (...)" vagy "van olyan x, amelyre (...)" helyére pedig $\exists x$ (...)" kerül. Ezzel együtt a továbbiakban kvantorszavak és mennyiségjelölők helyett kvantorokról fogunk beszélni. Ha több kvantor fordul elő egymás után, amelyeknek megegyezik a hatóköre, akkor természetesen elég egy közös zárójelpárt használni.

1.4e $\forall x \ \forall y$ ($\exists z$ (x egyenlő z-vel & y egyenlő z-vel) $\supset$ x egyenlő y-nal).

1.8e $\forall x$ (x rossz $\supset \exists y$ (y jó & y része x-nek).

Ezzel bevezettük a predikátumlogika alapvető jelöléseit. Vegyük észre, hogy jelölésmódunk radikálisabban tér el a megszokottól, mint az arisztotelészi szillogisztikában vagy a klasszikus kijelentéslogikában. Ezúttal a szimbólumok alkalmazásával helyenként teljesen eltértünk a mondatok nyelvtani szerkezetétől. Ezzel súlyos vádat emeltünk a nyelv ellen: azt állítjuk, hogy mondataink nyelvtani szerkezete nem tükrözik, hanem éppenséggel elrejtik kijelentéseink logikai formáját. A logikai szerkezetek ábrázolásához így egy, a természetes nyelvétől eltérő nyelvi eszközrendszerre lesz szükség. Ezt vázoljuk a következő szakaszban.

2. A klasszikus predikátumlogika nyelvének eszközei

Láttuk, hogy a klasszikus predikátumlogikában a változók úgy funkcionálnak, mint a természetes nyelv névmásai. A természetes nyelvi mondatok predikátumlogikai elemzésében a névmásokat vagy névmási szerepet betöltő egyéb kifejezéseket rendszerint változókkal is adjuk vissza. Ezt figyelhetjük meg a következő néhány mondat predikátumlogikai fordításában:

2.1 Ő halandó.

2.1a halandó(x)

2.2 János szereti őt.

2.2a szereti(János,x)

2.3 Ha valaki ember, akkor az halandó is.

2.3a $\forall x$ (ember(x) $\supset$ halandó(x))

A 2.2a példából kiderül, hogy a predikátumlogikai elemzésekben a változók mellett szükségünk van olyan kifejezésekre is, amelyek a természetes nyelv tulajdonneveinek felelnek meg. Ezeket névkonstansnak nevezzük. Arisztotelész általános terminusainak a klasszikus predikátumlogikában olyan hiányos kifejezések felelnek meg, amelyeket egy vagy több változóval vagy névkonstanssal kitöltve mondatot kapunk. A logikában az ilyen kifejezéseket nevezzük predikátumnak. (Az elnevezésnek csak etimológiai köze van a nyelvtanból ismert predikátum kifejezéshez.) A predikátumot kitöltő névkonstanst vagy változót argumentumnak nevezzük. A kitöltésre váró helyek száma lehet egy vagy több; eszerint beszélünk egy-, két- vagy többargumentumú predikátumokról, illetve a predikátumok argumentumszámáról. Néhány példa változóval kitöltött predikátumokra:

2.4 egyargumentumúak: okos(x); sétálx); ember(x); híresebb Einsteinnél(x), nem halandó(x);

2.5 kétargumentumúak: ismeri(x, y) [x ismeri y-t]; idősebb, mint(x, y) [x idősebb, mint y]; párhuzamos(x, y) [x párhuzamos y-nal];

2.6 háromargumentumúak: közötte van(x, y, z) [x az y és a z között van]; bemutatja(x, y, z) [x bemutatja y-t z-nek].

A többargumentumú predikátumok esetében az argumentumok sorrendje igen lényeges; a predikátum bevezetésekor ezt rögzíteni kell. Attól, hogy x ismeri y-t, még egyáltalán nem biztos, hogy y is ismeri x-et. A predikátumok kitöltésével atomi mondatokat kapunk. Ezeket aztán a klasszikus kijelentéslogikában megszokott módon bővíthetjük tovább. A logikai szimbólumokkal felírt mondatokat formulának nevezzük; 2.1a és 2.2a tehát atomi formulák, a következő mondatokat összetett formulával fordítjuk:

2.7 Kati nő, ő pedig férfi.

2.7a nő(Kati) & férfi(x)

2.8 Ha ő ember, akkor [ő] halandó.

2.8a ember(x) $\supset$ halandó(x)

Az 1.4e, az 1.8e és a 2.3a formulákban szerepel egy további eszköz: a kvantor. Kvantorok és a hozzájuk csatlakozó változók segítségével tetszőleges formulát tovább bővíthetünk. E bővítés általános szabálya igen egyszerű:

2.9 Ha φ tetszőleges formula és x tetszőleges változó, akkor $\forall x\ \varphi$ és $\forall x\ \varphi$ is formula.

φ a kvantor hatóköre; x pedig a kvantor által megkötött változó. φ nem egy konkrét formulát rövidít, hanem tetszőleges formulát képiselhet. Ehhez hasonlóan a szabályban szereplő x sem egy konkrét változó, hanem képviselheti x-et, y-t, z-t stb. A 2.9 szabály alkalmazásával kaphatjuk meg például 2.8a-ból 2.3a-t.

A szabályt ismételten is alkalmazhatjuk önnön eredményére. Így állíthatjuk elő az 1.4e és az 1.8e formulákat. Nézzük meg részletesen az 1.4e formula szerkesztésének lépéseit! Először előállítjuk az atomi komponenseket:

2.10 egyenlő(x, z)

2.11 egyenlő(y, z)

2.12 egyenlő(x, y)

Ezután konjunkcióval összekapcsoljuk 2.10-et és 2.11-et:

2.13 egyenlő(x, z) & egyenlő(y, z)

Most alkalmazzuk 2.13-ra a 2.9 szabályt:

2.14 $\forall z$ (egyenlő(x, z) & egyenlő(y, z))

Ezután kondicionálissal összekapcsoljuk 2.12-t és 2.14-et:

2.15 $\forall z$ (egyenlő(x, z) & egyenlő(y, z)) $\supset$ egyenlő(x, y)

Végül kétszer egymás után alkalmazzuk 2.15-re 2.9-et, és megkapjuk a keresett formulát:

1.4e $\forall x$ $\forall y$ ($\forall z$ (egyenlő(x, z) & egyenlő(y, z)) $\supset$ egyenlő(x, y))

Ha egy változó egy neki megfelelő kvantor hatókörében fordul elő, akkor a változónak ezt az előfordulását kötöttnek mondjuk. Ha egy változó valamely előfordulását nem köti kvantor, akkor szabad előfordulásról beszélünk. Zártnak mondjuk azokat a formulákat, amelyekben nincs szabad változóelőfordulás. Nyitottnak mondjuk azokat a formulákat, amelyek nem zártak. Szabad, illetve kötött változóelőfordulások helyett szokás szabad, illetve kötött változókról is beszélni. Ez némileg pontatlan, amint a következő példa is mutatja:

2.16 $\exists x$ $(Px$ & $Rxy)$ & Qx

Ebben a formulában x első két előfordulása kötött, a harmadik viszont szabad. A 2.9-ben ismertetett kvantorhasználati szabály alkalmat ad olyan szörnyszülöttek előállítására is, mint például az alábbi mondat:

2.17 $\exists x$ $\forall x$ $(Pa$ & $Qa)$

A formulák igazságfeltételeinek tárgyalása során látni fogjuk majd, hogy az ilyen esetekben a kvantorhasználat teljesen haszontalan, de veszélytelen is: ha a kvantor hatóköréül szánt formulában a megfelelő változó nem fordul elő szabadon, akkor a kvantifikált formula igazságfeltételei megegyeznek a hatókör igazságfeltételeivel. Esetünkben ez azt jelenti, hogy 2.17 igazságfeltételei ugyanazok, mint a következő kvantormentes formuláéi:

2.17a Pa & Qa

Bizonyos összefüggések kifejezéséhez szükségünk lesz egy speciális kétargumentumú predikátumra: ez az azonosságpredikátum. Egyenlőségjellel jelöljük; az x és az y változókal kitöltve tehát a következő formulát kapjuk: $x = y$. Más kétargumentumú predikátumok az argumentumaik által megjelölt dolgok közötti esetleges viszonyokat fejezik ki. Az azonosság azonban nem lehet esetleges viszony, hiszen logikailag lehetetlen, hogy két különböző dolog azonos legyen egymással. Az azonosság tehát speciális logikai reláció; ezért az $=$ jelet is felvesszük a logikai szimbólumaink közé.

Az azonosságpredikátum hasznos alkalmazását szemlélteti a következő kétértelmű mondat:

2.18 Egy ember sétál a parkban.

Ha ez a mondat egy történetet vezet be, akkor nyilván nem értjük bele, hogy más nem sétál a parkban, csak a mondatban említett ember. Ennek az értelmezésnek felel meg az alábi egyszerű formula:

2.18a $\exists x$ (ember(x) & sétál-a-parkban(x))

Ha viszont 2.18 a Hányan sétálnak a parkban? kérdésre válaszol, akkor az ember azt is beleérti, hogy senki más nem sétál a parkban. Azt, hogy másvalakiről beszélünk, az azonosságpredikátummal tudjuk kifejezni:

2.18b $\exists x$ (ember(x) & sétál-a-parkban(x) &
$\sim\exists y$ (ember(y) & sétál-a-parkban(y) & $\sim x = y$))

Ezzel végére értünk a predikátumlogikában használatos nyelvi eszközök felsorolásának. Érdemes még egyszer összefoglalni ezeket. Mindenekelőtt alkalmazunk logikai szimbólumokat: $\&, \vee, \supset, \sim, \forall, \exists, =, (,)$. Ezeken kívül vannak még a nyelvben változóink, névkonstansaink és predikátumaink. Változóként az x, y, z stb. betűket (szükség esetén x'-t, x''-t, x_1-et, x_2-t stb.) használjuk. A névkonstansokat, ha nem írjuk ki őket, a-val, b-vel, c-vel stb., a predikátumokat pedig P-vel, Q-val, R-rel stb. rövidítjük (P és Q rendszerint egyargumentumú, R és S pedig többargumentumú). Atomi formulákat a predikátumok kitöltésével kapunk, ezekből pedig kijelentéslogikai konnektívumok és kvantorok segítségével képezhetünk összetett formulákat.

3. Elemzési példák

Ebben a fejezetben magyar köznyelvi mondatok predikátumlogikai szerkezetét keressük meg. Néhány példát kidolgozunk, a többit az olvasóra bízzuk. Első elemzési példáinkban nem szerepel azonosságpredikátum.

3.1 Minden ember halandó.

E mondatot az előző fejezet elemzéseinek mintájára a következőképpen fogalmazhatjuk át:

3.1$'$ Bármi legyen is x, igaz rá, hogy ha x ember, akkor x halandó.

Az átfogalmazás birtokában a mondat predikátumlogikai szerkezetét könnyűszerrel megkaphatjuk:

3.1m $\forall x$ (ember(x) $\supset$ halandó(x))

Hasonló átfogalmazásokkal adjuk meg a többi arisztotelészi kijelentés predikátumlogikai szerkezetét is.

3.2 Nem minden ember halandó.

3.2$'$ Nem igaz, hogy bármi legyen is x, igaz rá, hogy ha x ember, akkor x halandó.

3.2m1 $\sim\forall x$ (ember(x) $\supset$ halandó(x))

De élhetünk ezzel az átfogalmazással is:

3.2$''$ x értékét meg lehet úgy választani, hogy x ember legyen, de nem halandó.

3.2m2 $\exists x$ (ember(x) & $\sim$halandó(x))

3.3 Némely ember halandó.

3.3$''$ x értékét meg lehet úgy választani, hogy x ember legyen, de halandó.

3.3m $\exists x$ (ember(x) & halandó(x))

3.4 Egyetlen ember sem halandó.

3.4$'$ x értékét nem lehet úgy megválasztani, hogy x ember legyen, de halandó.

3.4m1 $\sim\exists x$ (ember(x) & halandó(x))

Vagy egy másik átfogalmazással:

3.4″ Bármi legyen is x értéke, nem igaz rá, hogy ha x ember, akkor x halandó.

4m2 $\forall x\ {\sim}(\text{ember}(x) \supset \text{halandó}(x))$

3.5 Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.

A mondat egy univerzális kijelentést és egy részleges tagadást tartalmaz, amelyeket a de konnektívum kapcsol össze. Ezt a kapcsolatot, mint már tudjuk, a klasszikus logikában legjobban konjunkcióval tudjuk visszaadni. A két részkijelentésben felismerhetjük a bogár és a rovar egyargumentumú predikátumokat, és azokat az 1., ill. a 2. példa mintájára elemezhetjük. Az 5. példamondat predikátumlogikai szerkezetét így a következőképpen fejezhetjük ki:

3.5m $\forall x\ (\text{bogár}(x) \supset \text{rovar}(x))\ \&\ {\sim}\forall x\ (\text{rovar}(x) \supset \text{bogár}(x))$

Mivel a két kvantor hatóköre elkülönül egymástól, nincs szükség arra, hogy két különböző változót használjunk. (Ezt persze nem is tiltaná semmi.)

3.6 Minden ember egyenlő.

A mondat szerkezete természetesen különbözik a 3.1-étől, hiszen míg halandónak lenni tulajdonság, egyenlőnek lenni viszony:

3.6m $\forall x\ \forall y\ ((\text{ember}(x)\ \&\ (\text{ember}(y)) \supset \text{egyenlő}(x, y))$

3.7 Valaki mindenkit szeret.

Ezt a példamondatot kétértelműsége teszi érdekessé. Egyik értelmezése szerint minden emberhez található olyan másik ember – vagy éppen ő maga –, aki szereti őt. Ebben az értelmezésben a mondat szerkezete ugyanaz lesz, mint az előző fejezet 1.8 példamondatáé:

3.7m1 $\forall y\ \exists x\ \text{szereti}(x, y)$

A mondat második értelmezése szerint van egy olyan ember, aki az összes többit – közöttük saját magát is – szereti:

3.7m2 $\exists x\ \forall y\ \text{szereti}(x, y)$

A következő példák kidolgozása már az olvasó feladata.

3.8 Amelyik kutya ugat, az nem harap.

3.9 Aki magyar, velünk tart.

3.10 Mindenre van megoldás.

3.11 Az egyik nap olyan, mint a másik.

3.12 Mindent szabad, amit a törvény nem tilt.

3.13 Minden metafora sántít, de némelyik egyenesen béna.

3.14 Nem bízom az idegenekben.

3.15 Akad, amit nem gyógyít meg az idő sem.

3.16 Nincsen rózsa tövis nélkül.

3.17 A nők vagy csúnyák, vagy szépek és buták, de ha szépek és okosak is egyben, nem állnak szóba velem.

Most olyan példamondatok vizsgálatára térünk rá, amelyeknek a predikátumlogikai szerkezetéhez az azonosságpredikátumot is segítségül kell hívnunk.

3.18 A Hajnalcsillag és az Alkonycsillag egy és ugyanaz.

A predikátumlogikával ismerkedők tipikus hibája, hogy mindenütt kvantorokat keresnek, még az egyedi kijelentésekben is. Így szoktak keletkezni az alábbihoz hasonló szörnyszülöttek:

3.18m* $\forall x\ \forall y$ (Hajnalcsillag$(x) \equiv$ Alkonycsillag(x))

Ez a megoldás nyilvánvalóan hibás – ezt jelzi a csillag –, hiszen egyargumentumú predikátumokkal ad vissza tulajdonneveket, és univerzális kijelentést csinál egy egyedi kijelentésből. A megoldás természetesen lényegesen kézenfekvőbb és egyszerűbb:

3.18m Hajnalcsillag = Alkonycsillag

3.19 Csak ő ismer mindenkit a csapatból.

Itt ismét vigyáznunk kell, hogy ne túlozzuk el a kvantorok használatát. Az *ő* deiktikus névmás, a megfelelő predikátumlogikai formulában tehát szabad változó képviseli. A *csak* szócska arra utal, hogy nincs más, akire az őróla elmondottak igazak lennének:

3.19m1 $\forall z$ (csapattag$(z) \supset$ ismeri(x, z)) & $\forall y$ ($\forall z$ (csapattag$(z) \supset$ ismeri(y, z)) $\supset y = x$)

Mindezt tömörebben is megfogalmazhatjuk:

3.19m2 $\forall y$ ($\forall z$ (csapattag$(z) \supset$ ismeri(y, z)) $\equiv y = x$)

3.20 Aki kettőt-hármat szeret, nincsen arra jó világ.

A mondat értelmezésünkben ugyanazt fejezi ki, mint az alábbi átfogalmazás:

3.20′ Aki legalább kettőt szeret, arra nincs jó világ.

Ezt pedig a következőképpen fogalmazhatjuk át:

3.20″ Bárki legyen is x: ha van olyan y és z, amelyek nem azonosak egymással, továbbá x szereti y-t és x szereti z-t, akkor x-re nincs jó világ.

3.20m $\forall x$ ($\exists y\ \exists z$ ($y \neq z$ & szereti(x, y) & szereti(x, z)) $\supset$ nincs-rá-jó-világ(x))

Végül az olvasóra hagyjuk az alábbi példák kidolgozását:

3.21 Mindenkinek van valakije, csak nekem nincs senkim.

3.22 Őt ugyan nem ismerem, de ismerek valakit, aki ismer valakit, aki ismeri őt.

3.23 Nem ismer mindenki mindenkit, de mindenki ismer valakit, aki ismer mindenkit.

3.24 Arisztotelész nem más, mint a Sztagirita.

3.25 Ha egy szám páros és prím, akkor az nem más, mint a kettő.

3.26 Egyedül Isten tud mindent.

3.27 Nem ő mutatta be neki Jánost.

3.28 Legfeljebb ő tudja.

3.29 Minden cikk hivatkozik két másikra.

3.30 Hárman ültek a padon.

4. Igazságfeltételek

A logikai rendszerek feladata az, hogy adekvát kritériumokat szolgáltassanak bizonyos típusú következtetések helyességének ellenőrzéséhez. Ahhoz, hogy a klasszikus predikátumlogika be tudja tölteni ezt a feladatot, e rendszerben is szabatos meghatározást kell adni a helyes következtetés fogalmára. Ez nem egyszerű feladat. Általános meghatározásunk szerint egy következtetés akkor és csak akkor helyes, ha lehetetlen, hogy premisszái igazak, konklúziója hamis legyen. E meghatározás homályban hagyja, hogy pontosan milyen lehetőségekkel is kell számolni a premisszák és a konklúzió együttes igazságának, illetve hamisságának mérlegelésekor. Ez a feladat az egyes logikai rendszerekre marad. A következőkben tehát a klasszikus predikátumlogika formuláinak igazságfeltételeit kell tisztáznunk. Ezt a feladatot a következő fejezetre hagyjuk.