

Mekis Péter

A kijelentéslogika elemei

1. Következtetések feltételes kijelentésekkel

- (1) *Ha jó idő van, nyitva tart a büfé.*
- (2) *Ha nem érem el a hét ötvenes buszt, nem érek be időben a munkahelyemre.*
- (3) *Ha Einsteinnek igaza van, akkor nincs abszolút idő, és nincs abszolút tér sem.*

Az (1)-(3) kijelentések nem kategorikusak; két-két részkijelentést tartalmaznak, amelyek maguk sem okvetlenül kategorikusak. Az első részkijelentés az a feltétel, amelyhez a másodikat kötjük. Az ilyen kijelentéseket *feltételes kijelentésnek* nevezzük. Az első részkijelentést a feltételes kijelentés *előtagjának*, a másodikat a feltételes kijelentés *utótagjának* mondjuk. Természetesen a logikai szerkezet és nem a szóhasználat dönti el, hogy mit tekintünk feltételes kijelentésnek. Két példa feltételes kijelentés alternatív megfogalmazására:

- (4) *Amennyiben van kárhózat, üdvözlés is van.*
- (5) *Nem létezik örökmozgó – feltéve, hogy igaz az energiamegmaradás törvénye.*
Tekintsük néhány következtetést feltételes kijelentésekkel!
- (6) *Ha nem szavazzák meg a költségvetést, lemond a pénzügyminiszter.*
Márpedig nem szavazzák meg a költségvetést.
Tehát: *Lemond a pénzügyminiszter.*

A következtetés nyilvánvalóan helyes. Ezt az intuíciónkat az arisztotelészi szillogizmusok tárgyalásakor megismert indirekt módszerrel igazolhatjuk. Tegyük fel, hogy a premisszák igazak, de hamis a konklúzió! Az első premisszában a pénzügyminiszter lemondását azzal a feltétellel állítottuk, hogy nem szavazzák meg a költségvetést. A második premisszából tudjuk, hogy ez a feltétel teljesült. A konklúzió hamisságából viszont azt tudjuk, ahogy az, amit ehhez a feltételhez kötve állítottunk, nem igaz. Így az első premissza nem lehet igaz. Ez ellentmond indirekt feltevésünknek. A következtetést lényegesen átláthatóbbá tehetjük, ha a benne szereplő kijelentéseket paraméterrel rövidítjük:

- (6a) *ha A, akkor B*
A
Tehát: **B**

Ezt a következtetési sémát *modus ponensnek* nevezzük.

Vizsgáljunk meg egy másik, az iméntinél csak egy árnyalattal komplikáltabb következtetést:

- (7) *Ha elfogadod a kiválasztási axiómát, akkor egyszersmind azt is elfogadod, hogy bármely gömb átdarabolható két, vele megegyező térfogatú gömbbő.*
Márpedig nem fogadod el, hogy bármely gömb átdarabolható két, vele megegyező térfogatú gömbbő.
Tehát: *Nem fogadod el a kiválasztási axiómát sem.*

Mivel az egyes kijelentések szerkezete itt bonyolultabb, érdemes már most paraméterekkel rövidíteni a következtetésben szereplő kijelentéseket:

- (7a) *ha A, akkor B*
nem B
Tehát: *nem A*

Ennek a következtetési sémának *modus tollens* a neve. Helyességét ismét megmutathatjuk indirekt módon. Tegyük fel, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis! Ezek szerint **A** igaz, de **B** hamis; tehát az első premisszánkban foglalt feltétel teljesül, de amit ehhez a feltételhez kötöttünk, nem. Ezek szerint, indirekt feltevésünkkel ellentétben, az első premissza mégiscsak hamis.

Végül egy harmadik következtetés:

- (8) *Ha ünnepség van, akkor tűzijátékoznak.
Ha tűzijátékoznak, akkor fél a kutyám.
Tehát: Ha ünnepség van, akkor fél a kutyám.*

A következtetés szerkezete:

- (8) *ha A, akkor B
ha B, akkor C
Tehát: ha A, akkor C*

is nyilvánvalóan helyes; ennek igazolása azonban jóval problémásabb, mint az előző két esetben. Tegyük fel ugyanis, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis! Ahogy az előző példákban láttuk, egy feltételes kijelentés nyilvánvalóan hamis, ha a tények rá cáfolnak: az előtagja igaz, de az utótagja hamis. Ez esetben ünnepség van, de a kutyám mégsem fél. Mármost két lehetőség van: vagy tűzijátékoznak, vagy nem. Ha nem, akkor a tények rá cáfolnak az első premisszára, hiszen ünnepség van, de nem tűzijátékoznak. Ha igen, akkor a második premisszára cáfolnak rá a tények, hiszen tűzijátékoznak, de nem fél a kutyám. Mindenképpen ellentmondásba kerülünk azzal a feltevésünkkel, hogy a premisszák igazak.

De egy feltételes kijelentésre nem csak a tények cáfolhatnak rá. Nagyon is elképzelhető, hogy például se nem tűzijátékoznak, se nem fél a kutyám, és a konklúzió mégsem igaz. Mitől függ egy feltételes kijelentés igazsága, ha az előtagja hamis vagy az utótagja igaz? Ez nem egyszerű kérdés. Egy feltételes kijelentés igazságához az esetek döntő többségében az előtag és az utótag között valamilyen tartalmi összefüggésnek kell fennállni. Hogy ez az összefüggés miben áll, az esetről-esetre változó; lehet szó logikai következményviszonyról, oksági kapcsolatáról, vagy csak empirikusan megfigyelt szabályszerűségről.

Hogy megmeneküljünk ettől a nehézségtől, a továbbiakban a feltételes kijelentéseket rendkívül leegyszerűsített módon fogjuk értelmezni. Csak abban az esetben tekintjük őket hamisnak, ha a tények cáfolnak rájuk: egy *ha A, akkor B* formájú kijelentés akkor és csak akkor hamis, ha *A* igaz és *B* hamis; minden más esetben igaz. Ez az értelmezés nem követi a tényleges nyelvhasználatot. Rendkívül leegyszerűsített modelljét adja a feltételes kijelentéseknek. De ennek a modellnek legalább három előnye van:

1. rendkívüli módon megkönnyíti az igazságfeltételek tárgyalását;
2. már ezzel a leegyszerűsítő értelmezéssel is indokolható az (6)-(8)-ban tárgyalt alapvető következtetések helyessége;
3. a feltételes kijelentések más, kifinomultabb modelljeinek alapjául szolgálhat.

2. Következtetések egyéb kijelentéslogikai összetételekkel

Nem a feltételes kijelentések az egyedüli példák kijelentésekből összetett kijelentésekre. Nézzünk még néhány következtetést:

- (1) *Nyitva tartanak és van tej; vagy nyitva tartanak, de nincs tej.
Tehát: Nyitva tartanak.*

Tegyük fel, hogy a konklúzió hamis. Ekkor sem a *nyitva tartanak és van tej*, sem a *nyitva tartanak, de nincs tej* kijelentés nem igaz. Ezek szerint a premissza egésze sem lehet igaz. A következtetés tehát helyes. Szerkezete:

- (1a) *A és B; vagy A, de nem B.
Tehát: A*

- (2) *Akkor és csak akkor van zivatar, ha esik az eső, villámlik és mennydörög.
Tehát: Ha zivatar van, mennydörög.*

Tegyük fel hogy a konklúzió hamis. Ekkor – a feltételes kijelentésekre elfogadott egyszerűsített igazságfeltételeink szerint – a *zivatar van* kijelentés igaz, de a *mennydörög* kijelentés hamis. Ha viszont a *mennydörög* hamis, akkor az *esik az eső, villámlik és mennydörög* sem lehet igaz. Az *akkor és csak akkor*

egyik oldalán tehát igaz kijelentés van, míg a másikon hamis. A kijelentés tehát hamis. Lehetetlen, hogy a premissza igaz, a konklúzió viszont hamis legyen; a következtetés tehát helyes. Szerkezete:

(2) *A akkor és csak akkor, ha B és C és D*

Tehát: *ha A, akkor D*

Végül egy harmadik következtetés:

(3) *Ha ég a tábortűz és nem énekelünk, akkor valami gond van a hangulattal.*

Ha ég a tábortűz, énekelünk.

Tehát: *Nincs gond a hangulattal.*

Tegyük fel hogy a konklúzió hamis. Ekkor a *gond van a hangulattal* kijelentés hamis. Mivel ez az első premisszában foglalt feltételes kijelentés utótagja, az előtagnak hamisnak kell lenni. Hamis, hogy *ég a tábortűz és nem énekelünk*. Tehát vagy hamis az az kijelentés, hogy *ég a tábortűz*, vagy igaz az, hogy *énekelünk*. És éppen ez a feltétele annak, hogy a második premissza igaz legyen. A következtetés helyes. Szerkezete:

(3) *ha A és nem B, akkor C*

ha A, akkor B

Tehát: *nem C*

Vegyük sorra, milyen konnektívumokkal képeztünk példáinkban egyszerű kijelentésekből összetetteket, és milyen igazságfeltételeket tulajdonítottunk az összetételeknek!

- *ha A, akkor B*: hamis akkor és csak akkor, ha *A* igaz, *B* hamis; igaz minden más esetben. A *ha-akkor* konnektívumot *kondicionálisnak* nevezzük. (Más terminológiában: *implikáció*.)
- *A és B*: igaz akkor és csak akkor, ha *A* is, *B* is igaz; hamis minden más esetben. Logikai elnevezés: *konjunkció*.
- *A vagy B*: hamis akkor és csak akkor, ha *A* is, *B* is hamis; minden más esetben igaz. Elnevezés: *alternáció*. (Más terminológiában: *diszjunkció*.)
- *A akkor és csak akkor, ha B*: igaz akkor és csak akkor, ha *A* és *B* igazságértéke megegyezik. Elnevezés: *bikondicionális*. (Más terminológiában: *ekvivalencia* – de ezt a kifejezést mi egészen másra használjuk majd; arra, hogy két kijelentés logikai tartalma megegyezik.)
- *nem [igaz, hogy] A*: igaz akkor és csak akkor, ha *A* hamis. Elnevezés: *negáció*.

A kijelentéslogikában – pontosabban annak itt tárgyalt változatában, a *klasszikus kijelentéslogikában* – a fenti kifejezéseket és esetleges alternatív fogalmazásaikat mindig ezek szerint a szabályok szerint fogjuk értelmezni. Ezeket tekintjük következtetéseink logikai összetevőinek. A nem-logikai összetevők pedig azok az elemzetlen – elemi vagy eleminek tekintett – kijelentések, amelyekből a premisszák és a konklúzió felépülnek.

3. Példák igazságfeltételek elemzésére

A következő példák logikai elemzésében az aláhúzással kiemelt szavakat klasszikus kijelentéslogikai konnektívumként értelmezzük. A központozást zárójellel jelöljük; ilyenkor a vesszőhasználatról eltekintünk.

(1) *Ha vizes az úttest, akkor esik az eső vagy locsolókocsi járt erre.*

ha A akkor (B vagy C)

A teljes kijelentés akkor hamis, ha a *vizes az úttest* kijelentés igaz, de az *esik az eső vagy locsolókocsi járt erre* kijelentés hamis; az utóbbi azt jelenti, hogy mind az *esik az eső*, mind a *vizes az úttest* hamis. Tehát összefoglalva: az kijelentés hamis, ha az *esik az eső* igaz, a *vizes az úttest* hamis és a *locsolókocsi járt erre* is hamis; igaz minden más esetben.

(2) *Ha nem vizes az úttest, akkor az eső sem esik.*

ha nem B akkor nem A

A kijelentés akkor hamis, ha a *nem vizes az úttest* igaz, de a *nem esik az eső* hamis, tehát ha az *esik az eső* igaz és a *vizes az úttest* hamis; minden más esetben igaz.

(3) *Nem esik az eső, és az úttest sem vizes.*

nem A és nem B

A kijelentés akkor igaz, ha a *nem esik az eső* is és a *nem vizes az úttest* is igaz, tehát ha az *esik az eső* és a *vizes az úttest* is hamis; minden más esetben hamis.

(4) *Ha esik az eső vagy vizes az úttest, akkor nem áll, hogy nem esik az eső és az úttest sem vizes.*

ha (A vagy B) akkor nem (nem A és nem B)

A kijelentés akkor lenne hamis, ha az *esik az eső vagy vizes az úttest* igaz, a *nem áll, hogy nem esik az eső és nem vizes az úttest* pedig hamis volna; az utóbbi azt jelentené, hogy a *nem esik az eső és nem vizes az úttest* igaz, tehát mind az *esik az eső*, mind a *vizes az úttest* hamis. Ebben az esetben viszont az első tagmondatbeli *esik az eső vagy vizes az úttest* is hamis; a teljes kijelentés tehát nem lehet hamis, vagyis bárhogy alakuljon is a részkijelentések igazságértéke, logikai szerkezetéből adódóan mindig igaz lesz. Az ilyen kijelentéseket nevezzük *logikai igazságnak*.

A példákból jól látható, hogy az összetett kijelentések igazságfeltételeinek megállapításában valóban nem támaszkodtunk másra, mint részeik lehetséges igazságértékeire. Ez teszi lehetővé, hogy a bennük szereplő elemzetlen kijelentéseket az **A**, **B**, **C** stb. paraméterekkel helyettesítsük, így átláthatóbbá és általánosítva az elemzést. A *zárójelek* a többszörösen összetett kijelentések esetében jelzik, hogy melyik konnektívum mire vonatkozik. Ez az egyértelműsítés nagyon fontos; kis rosszindulattal (4)-et így is olvashatnánk:

ha (A vagy B) akkor nem (nem A) és nem B

– ez utóbbi változat persze nem logikai igazság.

Feladat

Add meg a lehető legpontosabban az alábbi mondatok kijelentéslogikai szerkezetét!

1. *Ha esik, ha fú, elmegyek és megnézem!*
2. *Tetszik, nem tetszik, megcsinálok és kész.*
3. *Ha esik az eső, akkor akkor is esik az eső, ha süt a nap.*
4. *Ha idejében elkészülök a munkámmal, akkor felhívlak, és ha lesz kedved, elmehetünk a moziba és megnézhetjük a filmet.*
5. *Ha bajban vagy, segítek, feltéve, hogy idejében szólsz.*
6. *Ha nem igaz, hogy angolul is tud, meg németül is, akkor vagy angolul nem tud, vagy németül.*
7. *Ha nem esik az eső, nem viszek ernyőt – feltéve, hogy csak akkor esik az eső, ha viszek ernyőt.*
8. *Ha sem János, sem Mari nem tanul, takarít vagy tévézik, akkor nem zavarom őket a látogatásommal.*
9. *Ha sietek és sehol egy taxi, vagy ha szorongok és senki nem nyugtat meg, menthetetlenül leizzadok.*
10. *Néha a 'pedig' 'és'-t jelent, meg a 'de' is, meg a 'meg' is.*
11. *Vasárnap este buli lesz; ha eső lesz, nem lesz, ha eső nem lesz, lesz.*
12. *Igaz, hogy ha a feltételes kijelentés igaz, akkor a logikai elemzése is igaz, de nem igaz, hogy ha a logikai elemzés igaz, akkor az eredeti feltételes kijelentés is igaz.*

Feladat

Ellenőrizd az alábbi következtetések helyességét!

1. *Ha fekszem az ágyon, csábít az álom.
Ha csábít az álom, messzire vágyom.
Tehát: Ha messze nem vágyom, nem fekszem az ágyon.*
2. *Ha vesszük a relációs következtetéseket, nem jut elég idő az érveléstechnikára.
Ha nem jut elég idő az érveléstechnikára, nem tudjuk meg, mire jó ez az egész.*

Márpedig megtudjuk, mire jó ez az egész.

Tehát: Nem vesszük a relációs következtetéseket.

3. Ha ezt a feladatot is elszúrom, most már aztán elmegy a kedvem az egésztől, feltéve, hogy volt egyáltalán kedvem.

Márpedig vagy egyáltalán nem volt kedvem, vagy most már aztán elmegy.

Tehát: Ezt a feladatot is elszúrom.

4. Ha további részletek is érdekelnek vagy csak olvashatnékod van, érdemes körülnézni a Ruzsa-könyvben.

Tehát: Nincs olvashatnékod.

4. Az igazságfeltételek ábrázolása: igazságtáblázatok

A (2)-(4) példákban csupán két elemi kijelentés, paramétereikkel: **A** és **B** szerepelt, így igazságfeltételeik megállapításakor csupán négy lehetőséget kellett figyelembe venni:

- **A** igaz, **B** igaz;
- **A** igaz, **B** hamis;
- **A** hamis, **B** igaz;
- **A** hamis, **B** hamis.

E lehetőségeket táblázatban ábrázolhatjuk, ezzel még áttekinthetőbbé téve az igazságfeltételek alakulását:

A	B	<u>ha nem B</u> <u>akkor nem A</u>	<u>nem A és</u> <u>nem B</u>	<u>ha (A vagy B) akkor</u> <u>nem (nem A és nem B)</u>
i	i	i	h	i
i	h	h	h	i
h	i	i	h	i
h	h	i	i	i

Bonyolultabb kijelentések esetében az igazságtáblázatban érdemes az egyre összetettebb részkijelentések igazságértékeit külön-külön is ábrázolni:

A	B	<u>A vagy B</u>	<u>nem A</u>	<u>nem B</u>	<u>nem A és</u> <u>nem B</u>	<u>nem (nem A</u> <u>és nem B)</u>	<u>ha (A vagy B) akkor</u> <u>nem (nem A és nem B)</u>
i	i	i	h	h	h	i	i
i	h	i	h	i	h	i	i
h	i	i	i	h	h	i	i
h	h	h	i	i	i	h	i

Az a) példához tartozó táblázatban már nyolc esetet kell ábrázolni:

A	B	C	<u>B vagy C</u>	<u>ha A akkor (B vagy C)</u>
i	i	i	i	i
i	i	h	i	i
i	h	i	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	i	h	i	i
h	h	i	i	i
h	h	h	h	i

6. Az igazságtáblázatok alkalmazása

Az igazságtáblázatok rendkívül hasznos eszköznek bizonyulnak alapvető kijelentéslogikai feladatokra:

- A *logikai igazságok* igazságtáblázatának fő oszlopában csak **i** szerepel (és viszont: ha csak **i** szerepel a fő sorban, a kijelentés logikai igazság). Egy példa:

A	B	C	<i>(ha A akkor (ha B akkor C)) akkor-és-csak-akkor-ha (ha (A és B) akkor C)</i>
i	i	i	i
i	i	h	i
i	h	i	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	i

Mivel minden sorban **i** szerepel, a kijelentésséma tehát logikai igazság.

- *Ekvivalens* kijelentések igazságtáblázatában a formulák sorról-sorra megegyező igazságértéket kapnak. Egy példa:

A	B	<i>nem (A vagy B)</i>	<i>nem A és nem B</i>
i	i	h	h
i	h	h	h
h	i	h	h
h	h	i	i

Mivel a táblázat a két mondatismához tartozó oszlopában sorról-sorra megegyezik, fennáll a

nem (A vagy B)

és a

nem A és nem B

közötti ekvivalencia.

- A helyes következtetések premisszáinak és konklúziójának közös igazságtáblázatában érvényes a következő szabály: minden olyan sorban, ahol a premisszák mindegyikénél **i** szerepel, a konklúzió is **i** szerepel (és megfordítva: ha a szabály érvényesül a táblázatban, a következtetés helyes, tehát a premisszák és a konklúzió között valóban fennáll a következményviszony). Egy példa:

A	B	<i>ha A akkor B</i>	<i>nem B</i>	<i>nem A</i>
i	i	i	h	h
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	i	i

A táblázat egyetlen olyan sorában, ahol mindkét premissza igaz, a konklúzió is igaz. A

ha A, akkor B

nem B

Tehát: *nem A*

következtetés tehát helyes.

7. Néhány logikai törvény

Az alábbi törvényekben szereplő **A**, **B**, **C** paraméterek tetszőleges kijelentéssel helyettesíthetők.

Logikai igazságok

- (1) $A \text{ vagy } \text{nem } A$
- (2) $\text{nem } (A \text{ és } \text{nem } A)$
- (3) $\text{ha } A, \text{ akkor } A$
- (4) $A \text{ akkor-és-csak-akkor-ha } A$
- (5) $\text{ha } A, \text{ akkor } (\text{ha } B, \text{ akkor } A)$
- (6) $\text{ha } (\text{ha } C \text{ akkor } (\text{ha } B \text{ akkor } A)) \text{ akkor } (\text{ha } (\text{ha } C \text{ akkor } B) \text{ akkor } (\text{ha } C \text{ akkor } A))$
- (7) $\text{ha } (\text{ha } B \text{ akkor } A) \text{ akkor } (\text{ha } \text{nem } A \text{ akkor } \text{nem } B)$

Ekvivalenciák

- (8) $(A \text{ és } A)$
és
 A
(a konjunkció idempotenciája)
- (9) $(A \text{ vagy } A)$
és
 A
(az alternáció idempotenciája)
- (10) $\text{nem } \text{nem } A$
és
 A
(a kettős negáció törvénye)
- (11) $((A \text{ és } B) \text{ és } C)$
és
 $(A \text{ és } (B \text{ és } C))$
(a konjunkció asszociativitása)
- (12) $((A \text{ vagy } B) \text{ vagy } C)$
és
 $(A \text{ vagy } (B \text{ vagy } C))$
(az alternáció asszociativitása)
- (13) $A \text{ és } B$
és
 $B \text{ és } A$
(a konjunkció kommutativitása)
- (14) $A \text{ vagy } B$
és
 $B \text{ vagy } A$
(az alternáció kommutativitása)
- (15) $(A \text{ és } (B \text{ vagy } C))$
és
 $(A \text{ és } B) \text{ vagy } (A \text{ és } C)$
(disztributivitás I.)

- (16) $(A \text{ vagy } (B \text{ és } C))$
 és
 $(A \text{ vagy } B) \text{ és } (A \text{ vagy } C)$
 (disztributivitás II.)
- (17) $\text{nem } (A \text{ és } B)$
 és
 $\text{nem } A \text{ vagy } \text{nem } B$
 (első De Morgan-törvény)
- (18) $\text{nem } (A \text{ vagy } B)$
 és
 $\text{nem } A \text{ és } \text{nem } B$
 (második De Morgan-törvény)
- (19) $\text{ha } A \text{ akkor } B$
 és
 $\text{ha } \text{nem } B \text{ akkor } \text{nem } A$
 (kontrapozíció törvénye)
- (20) $\text{ha } A \text{ akkor } B$
 és
 $\text{nem } A \text{ vagy } B$
 (a kondicionális kifejezése negációval és alternációval)
- (21) $\text{ha } A \text{ akkor } (\text{ha } B \text{ akkor } C)$
 és
 $\text{ha } (A \text{ és } B) \text{ akkor } C$
 (áthelyezési törvény)
- (22) $((A \text{ akkor-és-csak-akkor-ha } B) \text{ akkor-és-csak-akkor-ha } C)$
 és
 $(A \text{ akkor-és-csak-akkor-ha } (B \text{ akkor-és-csak-akkor-ha } C))$
 (a bikondicionális asszociativitása)
- (23) $A \text{ akkor-és-csak-akkor-ha } B$
 és
 $B \text{ akkor-és-csak-akkor-ha } A$
 (a bikondicionális kommutativitása)
- (24) $A \text{ akkor-és-csak-akkor-ha } B$
 és
 $(\text{ha } A \text{ akkor } B) \text{ és } (\text{ha } B \text{ akkor } A)$
 Következtetési törvények
- (25) A
 Tehát: A
- (26) $A \text{ és } B$
 Tehát: A
- (27) A
 Tehát: $A \text{ vagy } B$
- (28) $\text{ha } A \text{ akkor } B$
 A
 Tehát: B
 (modus ponens)

(29) $\underline{ha} A \text{ akkor } B$
 $\underline{nem} B$

Tehát: $\underline{nem} A$
 (modus tollens)

(30) $\underline{ha} A \text{ akkor } B$
 $\underline{ha} B \text{ akkor } C$

Tehát: $\underline{ha} A \text{ akkor } C$
 (láncszabály)

Feladat

Bizonyítsd be igazságtáblázat segítségével az (1)-(30) logikai törvényeket!

Megoldás

Néhány törvény bizonyítása:

A	B	$\underline{ha} B, \text{ akkor } A$	(5)
i	i	i	i
i	h	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i

Mivel minden sorban i szerepel, (5) logikai igazság.

A	B	$\underline{ha} B \text{ akkor } A$	$\underline{nem} A$	$\underline{nem} B$	$\underline{ha} \underline{nem} A \text{ akkor } \underline{nem} B$	(7)
i	i	i	h	h	i	i
i	h	i	h	i	i	i
h	i	h	i	h	h	i
h	h	i	i	i	i	i

Mivel minden sorban i szerepel, (5) logikai igazság.

A	B	C	$B \text{ vagy } C$	$(A \text{ és } (B \text{ vagy } C))$	$A \text{ és } B$	$A \text{ és } C$	$(A \text{ és } B) \text{ vagy } (A \text{ és } C)$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	i	i	h	i
i	h	i	i	i	h	i	i
i	h	h	h	h	h	h	h
h	i	i	i	h	h	h	h
h	i	h	i	h	h	h	h
h	h	i	i	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	h	h

Mivel a két jelölt oszlop sorról-sorra megegyezik, (15) valóban ekvivalencia.

A	B	$A \text{ vagy } B$	$\underline{nem} (A \text{ vagy } B)$	$\underline{nem} A$	$\underline{nem} B$	$\underline{nem} A \text{ és } \underline{nem} B$
i	i	i	h	h	h	h
i	h	i	h	h	i	h
h	i	i	h	i	h	h
h	h	h	i	i	i	i

Mivel a két jelölt oszlop sorról-sorra megegyezik, (18) valóban ekvivalencia.

A	B	C	$\underline{ha} A \text{ akkor } B$	$\underline{ha} B \text{ akkor } C$	$\underline{ha} A \text{ akkor } C$
---	---	---	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i
h	h	i	i	i	i
h	h	h	i	i	i

Mivel azokban a sorokban, ahol a premisszáknál **i** áll, a konklúziónál is **i** szerepel, a következtetés helyes.

8. Rész és egész

Milyen alapon döntjük el egy kijelentésről, hogy elemi vagy összetett, s hogy ha összetett, milyen logikai kapcsolat van a részei között? Ha mondataink köznyelvi formájára támaszkodnánk, biztos szempontjaink volnának az elemzéshez. Mivel azonban, mint láttuk, a nyelvi forma és az általunk keresett logikai viszonyok nincsenek összhangban, csak a mondatok értelmére, nyelvi-logikai intuíciónkra támaszkodhatunk. De hiszen éppen az intuíciónak való kiszolgáltatottságtól akarunk megszabadulni a logikai elemzés révén! Úgy tűnik, ez a körkörösség megkerülhetetlen: ha egy kijelentésben már feltártuk a logikai viszonyokat, akkor mechanikusan, mindenféle intuíció segítségével hívása nélkül megállapíthatjuk igazságfeltételeit; ahhoz azonban, hogy a logikai szerkezetet megállapítsuk, olyan önkényes lépésekre van szükségünk, amelyek feltételezik a logikai szerkezet előzetes ismeretét. Kérdés, hogy a körkörösség, a logikának ez a démona, minden esetben kiküszöbölendő rossz-e. Úgy tűnik, választanunk kell: vagy mondataink értelmezése, vagy az érveléseink lesznek körkörösek. Mi az előbbit választjuk.

Az iméntiek szerint nem tudjuk általánosságban meghatározni az elemi kijelentés fogalmát. Valóban: egy kijelentést csak az adott logikai elemzés kontextusában, praktikus szempontok szerint minősítünk eleminek. Nem foglalunk állást abban a nyelvfilozófiai kérdésben, hogy kijelentő mondatainknak van-e végső, abszolút értelemben vett logikai szerkezete.

Egy példa nyelvünk csalfaságára a rész-egész viszony tekintetében: elemezzük a *tévedek* kijelentést! Nyilván nem tekinthetjük atominak, hiszen akkor nem sokra mennénk vele. Felismerhetjük benne a negációt; kérdés, mire vonatkozik ez. Mivel a mondat állítása szerint abban tévedek, amit éppen állítok, a negáció nem a mondat egy részére, hanem a teljes, negált mondatra terjed ki:

$$A \Leftrightarrow \text{nem } A \Leftrightarrow \text{nem nem } A \Leftrightarrow \text{nem nem nem } A \dots$$

A kijelentés logikai szerkezete így az alábbi formát ölti, végtelen sok egymásba ágyazódó negációval:

$$\text{nem} (\text{nem} (\text{nem} (\dots)))$$

Ezt a szerkezetet természetesen nem tudjuk kijelentéslogikánkban kezelni, hiszen nem szerepel benne elemi kijelentés, amelynek igazságfeltételeire az összetett kijelentések igazságfeltételeit visszavezethetnénk. De más problémák is adódnak vele kapcsolatban: mivel az a mondat önnön hamisságát állítja, ha hamisnak minősítjük, akkor egyben tagadjuk is, hogy hamis volna, ha viszont igaznak, akkor azt tagadjuk, hogy igaz volna. (A mondat közismertebb megfogalmazásában így hangzik: *hazudok*. Ezzel az kijelentéssel kapcsolatban azt nem lehet eldönteni, hogy őszinte vagy hazug; ez az igazság/hazugság alternatívával csak akkor esik egybe, ha feltételezzük, hogy aki a mondatot mondja, nem tévedhet a saját hazugságát illetően.)

A huszadik században számos filozófus képviselte azt a nézetet, hogy kijelentéseinknek létezik egyetlen, meghatározott logikai szerkezete. A Bécsi Kör tagjai mellett ezt az álláspontot osztotta korai korszakában a század alighanem legjelentősebb bölcseleje, Ludwig Wittgenstein is, annak minden súlyos következményével együtt: a *tévedek*-hez hasonló megnyilatkozásokat egyszerűen értelmetlennek kellett nyilvánítaniuk. Noha ezt a tézist nemigen lehet empirikusan alátámasztani – okkal nevezhető tehát

metafizikainak –, kései korszakában Wittgenstein nehezen kikezdhető érvek alapján a leghatározottabban elvetette a logikai szerkezet egyediségébe és egyetemes érvényébe vetett hitet. A kései Wittgenstein szerint mindig csak egy adott beszédhelyzet – nyelvjáték – kontextusában beszélhetünk logikai szerkezetéről. Ez a fordulat tendenciózus: a huszadik század végére kevés filozófus gondolja azt, hogy a logika metafizikai kérdések döntőbírája lehetne. Ehhez a tendenciához igazodtunk, amikor azt mondtuk, hogy csak praktikus szempontok alapján minősíthetünk eleminek egy kijelentést, illetve befejezettnek egy logikai elemzést. Ennek következményeképpen a *tévedek*-hez hasonló önreflexív kijelentéseket el kell ugyan utasítanunk a kijelentéslogikában, de szigorúan gyakorlati szempontok alapján: azért, mert nem tudunk velük boldogulni, nem pedig azért, mert értelmetlenek.