Vizsga (2007. 12. 20.) - Kérdések + rövid válaszok

(Gödel)

1.

(A) Tekintsük az aritmetika egy tetszőleges mondatát. Ez a mondat, mivel a természetes számokról állít valamit, vagy igaz, vagy hamist, hiszen vagy fennáll, amit állít, vagy nem. Más szóval, vagy a szóban forgó mondat, vagy a negáltja, igaz. Márpedig, ha ez így van, akkor a Gödel első nem-teljességi tétele miatt azt mondhatjuk, hogy van az aritmetikának olyan igaz mondata, melyet az aritmetika axiómáiból nem tudunk levezetni.

(B) Gödel első nem-teljességi tételéből következik, hogy van az aritmetikának olyan mondata, hogy sem ő sem a negáltja nem bizonyítható. Értelmetlen dolog azonban azt mondani, hogy ez a mondat a természetes számokról állít valamit, és ez az állítás vagy igaz, vagy hamis, abban az értelemben, hogy amit állít, vagy fennáll, vagy nem.

A fenti két gondolatmenet közül melyiket sorolná a formalista és melyiket a platonista irányzathoz? (Két mondatos indoklást is adjon!)

(5 perc)

Válasz. Az (A) platonista, a (B) formalista. (A) feltételezi, hogy az aritmetika a „számokról" szól, mint valamilyen platóni világban létező entitásokról, s ezért a dolgok vagy így, vagy úgy állnak ebben a világban. (B) ezzel szemben ilyet nem tételez fel.

5 perc

2

Van-e valamilyen hasonlóság a meta-matematikai elméletek és a fizikai elméletek között? (Ha igen, akkor mi?)

Válasz. Van. Mindkettőnek a szerkezete egy (L, S), ahol L egy formális nyelv, S pedig egy az elmélet tárgyát alkotó dolgokra mutató szemantika. Tehát mindkettő szól valami*ről*. Ennek megfelelően, mindkét elmélet hasonló episztemológiai státuszú. Az L-ben értelmezett formális levezetthetőségen (Igazság$_1$) túl, az S szemantikán Keresztül, létezik a mondatoknak egy jelentésükből származó igazsága (Igazság$_2$) is.

3

Mit nevezünk bizonyításnak?

5 perc

Válasz. Bizonyítás az adott formális rendszer formuláinak egy véges sorozata, amelyre igaz, hogy a sorozat minden eleme vagy axióma, vagy a két következtetési szabály valamelyikével következik a sorozatban korábban szereplő formulákból.

4

Ezek itt az aritmetika axiómái:

(A1) $\neg(0 = sx)$
(A2) $(sx = sy) \to (x = y)$
(A3) $x + 0 = x$
(A4) $x + sy = s(x + y)$
(A5) $x \cdot 0 = 0$
(A6) $x \cdot sy = (x \cdot y) + x$
(A7) $(\psi(0) \wedge \forall x\,(\psi(x) \to \psi(sx))) \to \forall x \psi(x)$

Bizonyítsuk be, hogy $1 + 1 = 2$!

10 perc

Válasz. A rövidítések feloldásával, amit bizonyítanunk kell: $s0 + s0 = s(s0)$

(1) $s0 + s0 = s(s0 + 0)$ (A4)

(2) $s(s0 + 0) = s(s0)$ (A3)

(3) $s0 + s0 = s(s0)$ (Egyenlőség axiómáiból (E2) és (MP))

5

Tegyük fel, hogy az aritmetika konzisztens. Be lehet-e az aritmetika egy tetszőleges X formuláját úgy, indirekte bizonyítani, hogy bebizonyítjuk, hogy $\neg X$ nem tétel?

5 perc

Válasz. Nem. Ugyanis Gödel első tételében pontosan azt bizonyítottuk, hogy az aritmetika nem teljes. (Vagyis létezik olyan X formula, hogy sem ő sem $\neg X$ nem tétel. Tehát ha azt be is látjuk, hogy $\neg X$ nem tétel, ebből nem következik, hogy X tétel.)

6

Tekintsük a következő két idézetet:

(A) *Tétel:* $\{\phi \to \psi, \psi \to \chi, \phi\} \vdash \chi$
Bizonyítás:
(1) $\phi \to \psi$ [feltevés]
(2) $\psi \to \chi$ [feltevés]
(3) ϕ [feltevés]
(4) ψ [(1), (3), MP]
(5) χ [(2), (4), MP]

(B) Tétel: Ha $\mathcal{A} \models \phi$ és $\mathcal{A} \models \phi \to \psi$, akkor $\mathcal{A} \models \psi$.

Bizonyítás:

Legyen $[u_1, u_2, u_3, \ldots]$ tetszőleges értékelés. $\mathcal{A} \models \phi\,[u_1, u_2, u_3, \ldots]$ és $\mathcal{A} \models (\phi \to \psi)\,[u_1, u_2, u_3, \ldots]$. A teljesülés (implikációra vonatkozó) definíciójánál fogva: vagy $\mathcal{A} \models \neg\phi\,[u_1, u_2, u_3, \ldots]$, ami feltevésünk szerint lehetetlen, vagy $\mathcal{A} \models \psi\,[u_1, u_2, u_3, \ldots]$. Mivel ez tetszőleges értékelésre igaz, a tételt bebizonyítottuk.

Mi a különbség? Melyik számít a PC egy tétele bizonyításának?

5 perc

Válasz. Az (A) valóban egy tétele PC-nek. Eleget tesz a 3. kérdésben kérdezett definíciónak! Ezzel szemben (B) egy metaelméleti bizonyítás, és nem tesz eleget ennek a definíciónak. (Természetesen a metaelmélet is lehetne „formalizálva”, tehát lehetne egy rendes (L, S) struktúrájú elmélet, de a legkevesebb, amit akkor mondhatunk, hogy akkor (B) – pontosabban az annak megfelelő formalizált bizonyítás – nem PC-ben egy formulasorozat, hanem L-ben. (Hogy más, az előadáson megbeszélt episztemológiai problémákat ne is említsünk!)

7

Mit jelent az, hogy egy az aritmetikáról szóló meta-elméleti X mondatot reprezentál egy $\vartheta(X)$ formula az aritmetikában?

5 perc

Válasz. Azt, hogy kielégíti a következő feltételt:

$$\begin{array}{rl} \{\text{aritmetika}\} \vdash \vartheta(X) & \quad\text{ha } X \text{ igaz} \\ \{\text{aritmetika}\} \vdash \neg\vartheta(X) & \quad\text{ha } X \text{ hamis} \end{array} \tag{1}$$

8

Kommentálja az alábbi két állítást:

(A) $Pf(x, y, z)$ azt a meta-elméleti mondatot reprezentálja az aritmetikában, hogy „x azon formulasorozat Gödel-száma, amely bizonyítása annak a formulának, melyet az y Gödel-számú, egy szabad változós formulából nyertük, úgy, hogy a változó helyére a z számot helyettesítettük.”

Jelölje g a $\neg\exists x Pf(x, y, y)$ formula Gödel-számát.

(B) $\neg\exists x Pf(x, g, g)$ azt a meta-elméleti mondatott reprezentálja az aritmetikában, hogy „Nem bizonyítható az a formula, melyet úgy kapunk, hogy a g Gödel-számú, egy szabad változós formulában a változó helyére a g számot helyettesítjük.”

10 perc

Válasz. (A) állítás helyes, mert $Pf(x, y, z)$ valóban teljesíti a (1) feltételt $Pf^M(x, y, z)$-re nézve. (B) állítás azonban helytelen, mert $\neg\exists x Pf(x, g, g)$ – „intuitív olvasata” ellenére – nem teljesíti ezt a feltételt. (Lásd 88. oldal.)